დახურული ტიპის დავალებების პასუხები

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
დ	გ	ა	დ	გ	გ	ა	გ	ა	ბ	ბ	დ	ბ	დ	ბ	გ	ა	ბ

19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
გ	ა	დ	ბ	დ	დ	ბ	ა	ა	დ	გ	გ	გ	ბ	ა	ა	დ	ბ

ღია ტიპის დავალებების პასუხები

ამოცანა 37 **6 ქულა**

მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური $n>1$-თვის მართებულია უტოლობა:

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}<1-\frac{1}{n}.$$

პასუხის ერთ-ერთი ვარიანტი, რომელიც მაქსიმალური ქულით შეფასდება:

$A(n)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ წინადადება "$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}<1-\frac{1}{n}$ უტოლობა ჭეშმარიტია, როდესაც $n>1$". დასამტკიცებელია, რომ ჭეშმარიტია ყველა $A(n)$ წინადადება, სადაც $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$. აღნიშნული წინადადებები დავამტკიცოთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით.

ნაბიჯი 1. შევამოწმოთ $A(2)$ წინადადების ჭეშმარიტება. $A(2)$ წინადადებაა – "$\left(\frac{1}{2}\right)^2<1-\frac{1}{2}$ უტოლობა ჭეშმარიტია", რომელიც რა თქმა უნდა ჭეშმარიტია.

ნაბიჯი 2. ვაჩვენოთ, რომ ჭეშმარიტია გამონათქვამი "$A(k)\Rightarrow A(k+1)$", სადაც $k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$. ე.ი. უნდა ვაჩვენოთ $\sum_{i=2}^{k+1}\frac{1}{i^2}<1-\frac{1}{k+1}$ უტოლობის ჭეშმარიტება, იმ დაშვებით, რომ $\sum_{i=2}^{k}\frac{1}{i^2}<1-\frac{1}{k}$ უტოლობა ჭეშმარიტია.

მართლაც, $\sum_{i=2}^{k+1}\frac{1}{i^2}=\sum_{i=2}^{k}\frac{1}{i^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<1-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}=1-\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=1-\frac{k^2+2k+1-k}{k(k+1)^2}=$

$=1-\frac{k^2+k+1}{k(k+1)^2}<1-\frac{k^2+k}{k(k+1)^2}=1-\frac{k(k+1)}{k(k+1)^2}=1-\frac{1}{k+1}$.

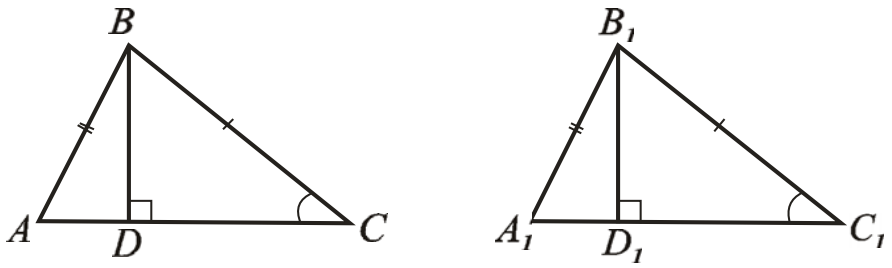
$A(n)$, $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ წინადადებების ჭეშმარიტება დამტკიცებულია.

ამოცანა 38 **8 ქულა**

გიამ განაცხადა, რომ მან აღმოაჩინა სამკუთხედების ტოლობის ახალი ნიშანი:

“ორი სამკუთხედი ტოლია, თუ ტოლია მათი ორი გვერდი და ამ გვერდებიდან ერთ-ერთის მოპირდაპირე კუთხე”,

და გთხოვათ შეგემოწმებინათ, მართებულია თუ არა ამ დებულების დასამტკიცებლად ჩატარებული ქვემოთ მოყვანილი მსჯელობა:

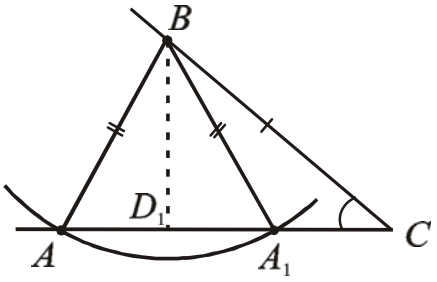


ვთქვათ ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედებში $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$ და $\angle ACB=\angle A_1C_1B_1$ (იხ. ნახაზი). დავუშვათ ამ სამკუთხედებში BD და B_1D_1 სიმაღლეები. BCD და $B_1C_1D_1$ მართკუთხა სამკუთხედებს ტოლი აქვთ ჰიპოტენუზა და მახვილი კუთხე, ამიტომ ეს მართკუთხა სამკუთხედები ტოლია. მაშასადამე $BD=B_1D_1$. ამის გამო ტოლია ABD და $A_1B_1D_1$ მართკუთხა სამკუთხედებიც, რადგან მათ ტოლი აქვთ ჰიპოტენუზა და თითო კათეტი. $AD=A_1D_1$ (ABD და $A_1B_1D_1$ სამკუთხედების ტოლობის გამო) და $DC=D_1C_1$ (BDC და $B_1D_1C_1$ სამკუთხედების ტოლობის გამო) ამიტომ $AC=A_1C_1$ და ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედები ტოლია, რადგან მათ ტოლი აქვთ სამივე გვერდი.

რა პასუხს გასცემდით გიას?

პასუხის ერთ-ერთი ვარიანტი, რომელიც მაქსიმალური ქულით შეფასდება:

გიას ვეტყოდი, რომ მის მიერ მოყვანილი დამტკიცება შეიცავს შეცდომას, რადგან სამკუთხედის წვეროდან დაშვებულმა სიმაღლემ ზოგ შემთხვევაში შეიძლება გადაკვეთოს სამკუთხედის გვერდი, ხოლო ზოგ შემთხვევაში მისი გაგრძელება. ამიტომ დამტკიცებაში ცალსახად იმის თქმა, რომ სამკუთხედებში BD და B_1D_1 სიმაღლეები შესაბამისად AC და A_1C_1 გვერდებს გადაკვეთენ, მცდარია.



გიას დავუხაზავდი სამკუთხედს (იხ. სურათი) სადაც დავანახებდი, რომ A_1 წერტილი შემიძლია ავიღო ისე, რომ პირობები $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ და $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$ შესრულებული იქნება, მაგრამ ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედები ტოლი არ იქნება. ამიტომ ვეტყოდი, რომ მის მიერ გამოთქმული დებულება მცდარია და სამკუთხედი ორი გვერდით და ამ გვერდებიდან ერთ-ერთის მოპირდაპირე კუთხით ცალსახად არ განისაზღვრება.

ამოცანა 39 **8 ქულა**

მოიფიქრეთ სამი სხვადასხვა სირთულის დავალება თემაზე: "სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულები". დავალებების მიზანი უნდა იყოს მოსწავლის შემდეგი უნარების შეფასება/განვითარება:

1) გეომეტრიული ფაქტის ცოდნა/გააზრება;
2) ცოდნის გამოყენების უნარი;
3) საკვლევი ტიპის ამოცანა, რომელიც მოცემული თემის კონტექსტში აფასებს მოსწავლის მსჯელობისა და ანალიზის უნარებს.

დაასაბუთეთ თქვენი არჩევანი.

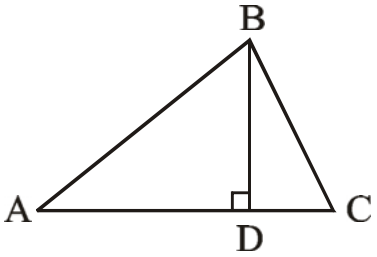
პასუხის ერთ-ერთი ვარიანტი, რომელიც მაქსიმალური ქულით შეფასდება:

დავალებების თემად შევარჩიოთ სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელი სამი ძირითადი ფორმულა: ფართობის გამოთვლა ფუძითა და მასზე დაშვებული სიმაღლით, ორი გვერდითა და მათ შორის კუთხით და სამი გვერდით (ჰერონის ფორმულა).

1) პირველი დავალების მიზანია სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულების ცოდნის შემოწმება. ამისათვის საკმარისია მოსწავლეს დავავალოთ სამკუთხედის დახაზვა და

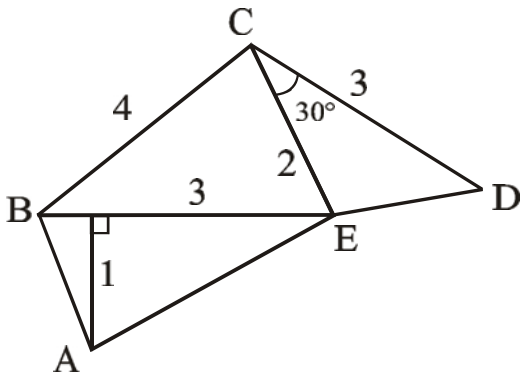
მისი ფართობის გამოსათვლელი ფორმულების დაწერა ამ სამკუთხედების ელემენტების მითითებით. მოვიყვანოთ ასეთი დავალების მაგალითი:

მოცემულია *ABC* სამკუთხედი. ქვემოთმოყვანილი ცხრილის მარჯვენა სვეტში ჩაწერეთ ფორმულები, რომლითაც გამოთვლით სამკუთხედის ფართობს ცხრილის მარცხენა სვეტში მოყვანილი მონაცემებისთვის.



მოცემულია	რომელი ფორმულით გამოითვლება *ABC* სამკუთხედის ფართობი ამ შემთხვევაში?
AC, BD	
AB, AC, ∠A	
AB, AC, BC	

2) მეორე დავალებამ უნდა შეამოწმოს მოსწავლის უნარი გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნისას სწორად შეარჩიოს სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელი საჭირო ფორმულა. ასეთ დავალებად გამოდგება, მაგალითად, შემდეგი ამოცანა:

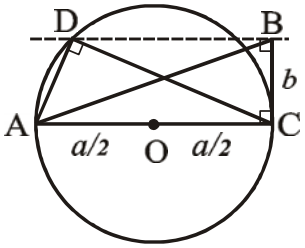


ნახატზე მითითებული ზომების მიხედვით იპოვეთ** ABCDE **ფიგურის ფართობი.

ამოცანა საშუალებას იძლევა შეფასდეს მოსწავლის მიერ სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელი სამივე ფორმულის ცოდნა და მათი გამოყენების უნარი გეომეტრიული ფიგურის ფართობის დასათვლელად.

3) საკვლევი ტიპის დავალებად შეიძლება მიეცეს, მაგალითად, ასეთი ამოცანა:
მოცემულია მართკუთხა სამკუთხედი კათეტებით a და b. ფარგლისა და სახაზავის დახმარებით ააგეთ ისეთი მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის ფართობი მოცემული სამკუთხედის ფართობის ტოლია და რომლის ჰიპოტენუზა უდრის a –ს.
რა ფარგლებში უნდა იყოს მოთავსებული b , რომ ამ ამოცანას ამოხსნა ჰქონდეს?

ნახატზე მოყვანილია აგების სქემა, საიდანაც ჩანს, რომ $0 < b \le \frac{a}{2}$.



ეს ამოცანა ანვითარებს და აფასებს მოსწავლის გეომეტრიულ ხედვასა და კვლევით უნარებს. კერძოდ, ამოცანის ამოხსნისას საჭიროა წერტილთა გეომეტრიული ადგილებისა და მათი თანაკვეთის მოძებნა, აგების შესრულება ფარგლითა და სახაზავით და b პარამეტრის დასაშვებ მნიშვნელობათა დადგენა.

ამოცანა 40 **12 ქულა**

თქვენ განზრახული გაქვთ კლასში მოსწავლეებს აუხსნათ $a^x = b$ მაჩვენებლიანი განტოლება, კერძოდ, გამოიკვლიოთ, თუ a და b პარამეტრების რა მნიშვნელობებისთვის გააჩნია ამ განტოლებას ამონახსნი, როგორია ამონახსნთა სიმრავლე და როგორი სახით წარმოიდგინება განტოლების ამონახსნი არსებობის შემთხვევაში.

აღწერეთ თქვენი მოქმედება გაკვეთილის მსვლელობის დროს:

1) ჩამოთვალეთ ის ფაქტები, რომელსაც შეახსენებდით ან აუხსნიდით მოსწავლეებს მოცემული საკითხის გასაგებად.
2) როგორ შეამზადებთ მოსწავლეებს ასახსნელი თემის ასათვისებლად?
3) როგორ აუხსნიდით მოსწავლეებს, რომ $a^x = b$ განტოლებას $(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$ გააჩნია ამონახსნი? რა სტრატეგიებსა და მითითებებს (მაგ., ვიზუალური წარმოდგენა, ფორმულა) გამოიყენებდით ამ მიზნის მისაღწევად? აღწერეთ სასწავლო მასალის გადაცემის ერთ-ერთი გზა.
4) რა სახის აქტივობებს, სწავლებისა და კლასის ორგანიზაციის ფორმებს გამოიყენებდით მოსწავლეების სასწავლო პროცესში ჩართვის მიზნით;

პასუხის ერთ-ერთი ვარიანტი, რომელიც მაქსიმალური ქულით შეფასდება:

პირველ რიგში მოსწავლეთა დაინტერესებისა და მოტივაციის მიზნით მოვიყვან ცხოვრებისეულ მაგალითს უწყვეტი დარიცხვის პროცენტზე ან პოპულაციის ზრდაზე.

მოცემული საკითხის გასაგებად კი მოსწავლეებს შევახსენებ მაჩვენებლიანი ფუნქციის თვისებებსა და მის გრაფიკს, კერძოდ რომელიმე მოსწავლეს გამოვიყვან დაფასთან და ავაგებინებ $y = a^x$, $(a > 0,\ a \neq 1)$ ფუნქციის გრაფიკს. დავსვამ შეკითხვას: რა არის $y = a^x$, $(a > 0,\ a \neq 1)$ ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე? თუ გაუჭირდათ მოსწავლეებს სწორი პასუხის გაცემა, მათ კიდევ ერთხელ შევახსენებ ამ ცნებებს და აგებულ გრაფიკზე ვაჩვენებ, რომ მოცემულ შემთხვევაში განსაზღვრის არეა $(-\infty;\infty)$, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლე კი - $(0;\infty)$.

ამის შემდეგ მოსწავლეებს შევახსენებ, რომ მათ უკვე იციან როგორ ამოვხსნათ ელემენტარული ტიპის მაჩვენებლიანი განტოლებები, როდესაც ამონახსნი მთელი რიცხვია. ამ ცოდნის შესამოწმებლად რომელიმე მოსწავლეს მივცემ დავალებას ამოხსნას მაგალითად $3^x = 9$ განტოლება. სხვა მოსწავლეს დავალებ ააგოს $y = 3^x$ და $y = 9$ ფუნქციების გრაფიკები, მოძებნოს მათი გადაკვეთის წერტილი. დავსვამ შეკითხვას რა კავშირია ამ გადაკვეთის წერტილსა და $3^x = 9$ განტოლების ამონახსნს შორის. შევეცდები, მოსწავლეებს დავანახო, რომ $3^x = 9$ განტოლების ამონახსნის პოვნა შეიძლება გრაფიკების საშულებით. ამ საკითხის გასამყარებლად განვიხილავ კიდევ ერთ განტოლებას $4^x = \frac{1}{16}$.

შემდეგ მოსწავლეებს ავუხსნი, თუ როგორ ვიპოვოთ $a^x = b$, $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$ განტოლების ამონახსნი. მათ ვეტყვი, რომ ისევე როგორც წინა მაგალითებში, ზოგად შემთხევაშიც შეგვიძლია გამოვიყენოთ გრაფიკები. ვიზუალური წარმოდგენით მოსწავლეებს დავარწმუნებ, რომ $y = a^x$, $(a > 0,\ a \neq 1)$ ფუნქციის გრაფიკს ყოველთვის გადაკვეთს $y = b$, $b > 0$ წრფე და მასთან მხოლოდ ერთ წერტილში, რადგან $y = a^x$, $(a > 0,\ a \neq 1)$ ფუნქცია მონოტონურია (ზრდადია, თუ $a > 1$ და კლებადია თუ $0 < a < 1$) და მნიშვნელობათა სიმრავლე $(0;\infty)$-ია. ეს კი ნიშნავს, რომ $a^x = b$ განტოლებას $(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$ გააჩნია ამონახსნი და ის ერთადერთია. აქვე ვეტყვი, რომ ეს რიცხვი აღინიშნება $\log_a b$ და ეს არის ის რიცხვი, რომელ ხარისხშიც უნდა ავიყვანოთ a რომ მივიღოთ b. ამის შემდეგ კლასში ამოვხსნი $3^x = 5$, $4^x = 17$ ტიპის რამდენიმე განტოლებას და ამ თემაზე მივცემ საშინაო დავალებას.