გამოცდების ეროვნული ცენტრი

2010 წლის ეროვნული სასწავლო ოლიმპიადა

მათემატიკაში

თბილისი 2010

სარჩევი

წინასიტყვაობა

მოსწავლეთა მათემატიკის ოლიმპიადებს საქართველოში ხანგრძლივი ისტორია აქვს: ფიზიკა-მათემატიკის პირველი რესპუბლიკური ოლიმპიადა 1964-65 წლებში ჩატარდა და მას შემდეგ რეგულარულად ტარდება. საქართველოს წარმომადგენლები მონაწილეობას ღებულობდნენ როგორც საბჭოთა კავშირში ჩატარებულ საკავშირო მათემატიკის ოლიმპიადებში, ასევე მათემატიკის საერთაშორისო ოლიმპიადებშიც. 1995 წლიდან საქართველოს მოსწავლეთა ნაკრები გუნდი დამოუკიდებლად იღებს მონაწილეობას საერთაშორისო მათემატიკურ ოლიმპიადებში.

მათემატიკის ეროვნული ოლიმპიადა მოწოდებულია გააღვივოს მოსწავლეებში მათემატიკის სწავლისადმი ინტერესი, გამოავლინოს და წაახალისოს მათემატიკური ნიჭით დაჯილდოებული მოსწავლეები, გაუწიოს პოპულარიზაცია მათემატიკას მოსწავლეთა შორის.

საქართველოს განათლებისა და მეცნიერების მინისტრის 2009 წლის 18 მარტს გამოცემული ბრძანებით დამტკიცდა ეროვნული სასწავლო ოლიმპიადის ჩატარების ახალი წესი. ამ წესის თანახმად ოლიმპიადის ჩატარებას უზრუნველყოფს გამოცდების ეროვნული ცენტრი.

2010 წელს მათემატიკის ოლიმპიადა ჩატარდა სამ ტურად ხუთ ასაკობრივ ჯგუფში (VII, VIII, IX, X და XI-XII კლასები). გამოცდების ეროვნული ცენტრის თანამშრომლებისა და მოწვეული ექსპერტების მიერ ყოველ ტურში თითოეული ასაკობრივი ჯგუფისთვის მომზადდა შესაბამისი სირთულის 5 ამოცანისაგან შემდგარი ტესტი, რომელიც ეროვნულ სასწავლო გეგმას ეყრდნობოდა.

ოლიმპიადის პირველი ტური ჩატარდა 10 იანვარს. მასში მონაწილეობა მიიღო VII-XII კლასების 18756 მოსწავლემ. პირველ ტურში გამარჯვებულმა 947 მოსწავლემ მონაწილეობა მიიღო ოლიმპიადის მეორე ტურში, რომელიც 13 მარტს ჩატარდა. ოლიმპიადის დასკვნითი ტური ჩატარდა თბილისში 17 აპრილს მასში მონაწილეობდა მეორე ტურში გამარჯვებული 231 მოსწავლე. ოლიმპიადის დასკვნითი ტურის გამარჯვებულები დიპლომებითა და პრიზებით დაჯილდოვდნენ, ხოლო დანარჩენ მონაწილეებს სიგელები გადაეცათ. დაჯილდოვდნენ აგრეთვე ის სასწავლო დაწესებულებები, რომელთა მოსწავლეებიც წარმატებით გამოვიდნენ ოლიმპიადაზე.

ეროვნული ოლიმპიადის შედეგების გათვალისწინებით შეირჩნენ საქართველოს ნაკრების წევრები მათემატიკის საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის: ნოდარ ამბროლაძე, გიორგი გიგლემიანი, გიგა გუმბერიძე, ლაშა ლაკირბაია, ნიკა მაჭავარიანი, ცოტნე ტაბიძე და ლაშა ფერაძე. საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის საქართველოს ნაკრები გუნდის შედგენის, მომზადებისა და მონაწილეობის ორგანიზაციას საქართველოს ეროვნული სამეცნიერო ფონდი ახორციელებდა.

მათემატიკის 51-ე საერთაშორისო ოლიმპიადა 2-14 ივლისს ჩატარდა ყაზახეთში, ქალაქ ასტანაში. საქართველოს ნაკრებმა მასში წარმატებით იასპარეზა: მან 96 მონაწილე ქვეყნიდან 34-ე ადგილი დაიკავა. ნაკრების წევრებმა ორი ვერცხლის, ორი ბრინჯაოს მედალი და ორი საპატიო სიგელი მოიპოვეს.

მათემატიკის 51-ე საერთაშორისო ოლიმპიადის გამარჯვებულები არიან:
ლაკირბაია ლაშა (ვერცხლის მედალი) - თბილისის 199-ე საჯარო სკოლა–პანსიონის "კომაროვი" XII კლასის მოსწავლე;

ფერაძე ლაშა (ვერცხლის მედალი) - თბილისის 199-ე საჯარო სკოლა–პანსიონის "კომაროვი" - XII კლასის მოსწავლე;
ტაბიძე ცოტნე (ბრინჯაოს მედალი) - ქუთაისის ა.რაზმაძის სახ. 41-ე საჯარო სკოლის XI კლასის მოსწავლე;
გუმბერიძე გიგა (ბრინჯაოს მედალი) - თბილისის 199-ე საჯარო სკოლა–პანსიონის "კომაროვი" XI კლასის მოსწავლე;
გიგლემიანი გიორგი (საპატიო სიგელი) - თბილისის 42–ე საჯარო სკოლის XI კლასის მოსწავლე;
ამბროლაძე ნოდარ (საპატიო სიგელი) - ქუთაისის ა.რაზმაძის სახ. 41-ე საჯარო სკოლის XI კლასის მოსწავლე.

წინამდებარე კრებულში თავმოყრილია 2010 წლის ეროვნულ ოლიმპიადაზე მიცემული ამოცანები თავისი ამოხსნებით, აგრეთვე მათემატიკის 51-ე საერთაშორისო ოლიმპიადაზე მიცემული ამოცანები. ვფიქრობთ, კრებული სათანადო დახმარებას გაუწევს მოსწავლეებსა და მასწავლებლებს მომავალი მათემატიკის ოლიმპიადებისათვის მომზადებაში.

საგამოცდო ცენტრი მომავალი ოლიმპიადებისთვის ქმნის საოლიმპიადო დავალებათა ბანკს. ამ მიზნით განზრახულია ყოველწლიური კონკურსის ჩატარება, რომელშიც მონაწილეობის მიღების უფლება აქვს ნებისმიერ ფიზიკურ პირს.

საგამოცდო ცენტრი, შემოსული დავალებების შეფასების შედეგად შერჩეულ საუკეთესო დავალებებს მოათავსებს საოლიმპიადო დავალებათა ბანკში, საიდანაც მოხდება საოლიმპიადო ტესტების დაკომპლექტება. ოლიმპიადისთვის შერჩეული დავალებების ავტორები მიიღებენ შესაბამის ანაზღაურებას.

მათემატიკის საოლიამპიადო დავალებათა კონკურსში მონაწილეობის მსურველთათვის საჭირო ინფორმაცია გამოქვეყნდება მისამართზე www.naec.ge.

გთხოვთ, მათემატიკის ეროვნულ ოლიმპიადასთან დაკავშირებული შენიშვნები და წინადადებები გამოგზავნოთ მისამართზე:

თბილისი, 0102

ივ. ჯავახიშვილის 60

ტელ.: 95-25-88, 96-80-78

e-mail: mathematics@naec.ge

გამოცდების ეროვნული ცენტრის მათემატიკის ჯგუფი.

მათემატიკაში ეროვნული სასწავლო ოლიმპიადის I ტურის ამოცანები

VII კლასი

ამოცანა 1 — 5 ქულა

ერთ კლასში 25 მოსწავლეა. მათგან 16-მა იცის ჭადრაკის თამაში, 11-მა –შაშის, ხოლო 3-მა - არც ჭადრაკის და არც შაშის თამაში. რამდენმა მოსწავლემ იცის როგორც ჭადრაკის, ისე შაშის თამაში?

ამოცანა 2 — 5 ქულა

მოცემულია ერთმანეთის მომდევნო რამდენიმე ნატურალური რიცხვი $1,2,...,n$, რომელთა შორის ზუსტად 47 რიცხვია 9-ის ჯერადი. $1,2,...,n$ რიცხვებს შორის ყველაზე მეტი, რამდენი რიცხვი შეიძლება იყოს 3-ის ჯერადი?

ამოცანა 3 — 5 ქულა

მას შემდეგ, რაც მგზავრმა მთელი გზის $\frac{2}{5}$ გაიარა, აღმოჩნდა, რომ შუა გზამდე გასავლელი დარჩა გავლილზე 15 კილომეტრით ნაკლები. რამდენი კილომეტრი იყო მთელი გზა?

ამოცანა 4 — 5 ქულა

კვადრატის ფორმის ფურცელი გაჭრეს ორ მართკუთხედად ისე, რომ ერთი ნაჭრის ფართობი მეორე ნაჭრის ფართობზე ორჯერ მეტი აღმოჩნდა. გამოთვალეთ დიდი და მცირე ნაჭრების პერიმეტრების შეფარდება.

ამოცანა 5 — 5 ქულა

გიგის 100 ერთნაირი ზომის მუყაოს კუბი ჰქონდა. ამ კუბების შეწებებით მან შესაძლო უდიდესი ზომის კუბი ააწყო და მისი ზედაპირი შეღება. დიდი კუბის ასაწყობად გამოყენებული მცირე კუბებიდან რამდენია ისეთი, რომლის

ა) მხოლოდ ერთი წახნაგი შეიღება?

ბ) არცერთი წახნაგი არ შეიღება?

VIII კლასი

ამოცანა 1 5 ქულა

მოცემულია ერთმანეთის მომდევნო რამდენიმე ნატურალური რიცხვი $1, 2, \ldots, n$, რომელთა შორის ზუსტად 57 რიცხვია 11-ის ჯერადი. $1, 2, \ldots, n$ რიცხვებს შორის ყველაზე მეტი, რამდენი რიცხვი შეიძლება იყოს 4-ის ჯერადი?

ამოცანა 2 5 ქულა

მათემატიკის ოლიმპიადის I ტურში გოგონებზე 1,5-ჯერ მეტი ვაჟი მონაწილეობდა. მათგან ვაჟების 7% და გოგონების 10% გავიდა მეორე ტურში. ამასთან, ცნობილია, რომ მეორე ტურში გოგონებზე 42-ით მეტი ვაჟი გავიდა. რამდენი მოსწავლე მონაწილეობდა ოლიმპიადის I ტურში?

ამოცანა 3 5 ქულა

ABC ტოლფერდა სამკუთხედში AB ფერდზე აღებულია M და N წერტილები (M წერტილი A და N წერტილებს შორისაა), ხოლო BC ფერდზე K წერტილი. ამასთან, $AC = CM = MK = KN = NB$. გამოთვალეთ B კუთხის სიდიდე.

ამოცანა 4 5 ქულა

დაამტკიცეთ, რომ სამნიშნა ნატურალური რიცხვის 9-ზე გაყოფით იგივე ნაშთი მიიღება, რაც მისი ციფრების ჯამის 9-ზე გაყოფით.

ამოცანა 5 5 ქულა

იპოვეთ ყველა ისეთი მართკუთხედის სიგრძე და სიგანე, რომლის გვერდების სიგრძეები ნატურალური რიცხვებია, ხოლო პერიმეტრი ორჯერ ნაკლები რიცხვით გამოისახება, ვიდრე ფართობი.

IX კლასი

ამოცანა 1 5 ქულა

დაამტკიცეთ, რომ $(4+\sqrt{15})(\sqrt{6}-\sqrt{10})\sqrt{4-\sqrt{15}}=-2$.

ამოცანა 2 5 ქულა

a ნატურალური რიცხვის 5-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთი არის 4. რისი ტოლია a^2+2a რიცხვის 5-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთი?

ამოცანა 3 5 ქულა

ცნობილია, რომ $\begin{cases} 2x+ky=3 \\ -3x+y=1 \end{cases}$ სისტემას ამონახსნი არ გააჩნია (x, y ცვლადების მიმართ). იპოვეთ k.

ამოცანა 4 5 ქულა

შვიდი ალბომი და სამი წიგნი ორჯერ მეტი ღირს, ვიდრე სამი ალბომი და ოთხი წიგნი. რამდენი პროცენტით მეტია ერთი ალბომის ფასი ერთი წიგნის ფასზე?

ამოცანა 5 5 ქულა

ამოზნექილ ოთკუთხედში გავლებული დიაგონალებით შედგენილი სამკუთხედებიდან სამი სამკუთხედის ფართობი შესაბამისად არის S_1, S_2 და S_3. იპოვეთ ოთკუთხედის ფართობი.

X კლასი

ამოცანა 1 5 ქულა

დაამტკიცეთ, რომ თუ $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{a+b}$ არითმეტიკული პროგრესიაა, მაშინ a^2, b^2 , c^2 არითმეტიკულ პროგრესია იქნება.

ამოცანა 2 5 ქულა

ცნობილია, რომ $2f(x)+3f(-x)=x^2-x$ ნებისმიერი ნამდვილი x რიცხვისათვის. იპოვეთ $f(x)$.

ამოცანა 3 5 ქულა

ცნობილია, რომ რიცხვი $1+\sqrt{2}$ არის $x^2+ax+b=0$ განტოლების ერთერთი ფესვი. ამასთანავე a და b რაციონალური რიცხვებია. იპოვეთ a და b.

ამოცანა 4 5 ქულა

მოცემულია სამი მონაკვეთი, რომელთა სიგრძეებია $a+3$, $2a-2$ და 5. იპოვეთ a- ს ყველა ის მნიშვნელობა რომლისთვისაც მოცემული მონაკვეთებიდან შესაძლებელია სამკუთხედის შედგენა.

ამოცანა 5 5 ქულა

ABC მართკუთხა სამკუთხედის მართი კუთხის წვეროდან გავლებულია CM მედიანა. ACM და BCM სამკუთხედების პერიმეტრებია შესაბამისად 16 და 18. იპოვეთ სამკუთხედის კათეტები.

XI-XII კლასები

ამოცანა 1 5 ქულა

a, b და c რიცხვები ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას, ხოლო $a+2b, 2a+b+c$ და $a+3b+c$ რიცხვები - არითმეტიკულ პროგრესიას. იპოვეთ გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი.

ამოცანა 2 5 ქულა

გამოარკვიეთ, რომელი რიცხვი მეტია

$$\frac{2009200920092009}{2009210920092009} \text{ თუ } \frac{2009210920092009}{2009220920092009}?$$

ამოცანა 3 5 ქულა

$ABCD$ კვადრატში ჩახაზულია A ცენტრისა და AB რადიუსის მქონე წრეწირის BD რკალი. ამ რკალის ნებისმიერ წერტილზე გავლებული მხები კვადრატის BC გვერდს კვეთს E წერტილში, ხოლო CD გვერდს – F წერტილში. იპოვეთ EAF კუთხე.

ამოცანა 4 5 ქულა

a პარამეტრის რა მნიშვნელობებისთვის არის $4+a$, $6+a$ და $8+a$ გვერდების მქონე სამკუთხედი მახვილკუთხა?

ამოცანა 5 5 ქულა

a პარამეტრის რა მნიშვნელობებისთვის აქვს მხოლოდ ერთი ამონახსნი შემდეგ უტოლობათა სისტემას $\begin{cases} y \geq x^2 + 4a^2 \\ x \geq y^2 + 4a^2 \end{cases}$?

მათემატიკაში ეროვნული სასწავლო ოლიმპიადის II ტურის ამოცანები

VII კლასი

ამოცანა 1 — 5 ქულა

დაამტკიცეთ, რომ თუ სამნიშნა რიცხვის ჩანაწერს მარცხნიდან იმავე რიცხვს მივუწერთ, მიღებული ექვსნიშნა რიცხვი 1001-ის ჯერადი იქნება.

ამოცანა 2 — 5 ქულა

ტოლი პერიმეტრების მქონე მართკუთხედის ფორმის ორი ნაკვეთიდან ერთი კვადრატული ფორმისაა, ხოლო მეორის სიგრძე სამჯერ მეტია სიგანეზე. რომელი ნაკვეთის ფართობია ნაკლები და რამდენი პროცენტით?

ამოცანა 3 — 5 ქულა

მათემატიკის წრეში გაერთიანებული გოგონების რაოდენობა მთელი რაოდენობის 45%-ზე მეტი და 50%-ზე ნაკლებია. სულ მცირე რამდენი მოსწავლეა წრეში და მათგან რამდენია გოგონა?

ამოცანა 4 — 5 ქულა

იპოვეთ n-ის რა უმცირესი მნიშვნელობისათვის დამთავრდება ნატურალურ რიცხვთა ნამრავლი $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$ ათი ნულით?

ამოცანა 5 — 5 ქულა

ოთხი ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის ერთმანეთთან მიდგმით მიიღეს ოთხკუთხედი, რომლის ორი მოპირდაპირე გვერდი პარალელური, ხოლო ორი არაპარალელურია. თითოეული სამკუთხედის პერიმეტრი 10 სმ-ია. გამოთვალეთ მიღებული ოთხკუთხედის პერიმეტრი.

VIII კლასი

ამოცანა 1 5 ქულა

აჩვენეთ, რომ ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის n^2+n+1 რიცხვი კენტია და არ წარმოადგენს ნატურალური რიცხვის კვადრატს.

ამოცანა 2 5 ქულა

მაღაზიამ შეცვალა გასაყიდი ტელევიზორის ფასი. ამის შემდეგ გაყიდული ტელევიზორების რაოდენობა შემცირდა 4%-ით, მათი გაყიდვიდან მიღებული თანხა კი გაიზარდა 8%-ით. შეამცირა თუ გაზარდა მაღაზიამ ტელევიზორის ფასი და რამდენი პროცენტით?

ამოცანა 3 5 ქულა

24 სმ პერიმეტრის მქონე კვადრატული ფორმის ფურცელი დიაგონალებზე დაჭრეს ოთხ სამკუთხედად და მათი ერთმანეთთან მიდგმით მიიღეს ტრაპეცია. გამოთვალეთ მიღებული ტრაპეციის პერიმეტრი.

ამოცანა 4 5 ქულა

ABC სამკუთხედის A კუთხის ბისექტრისა B წვეროდან გავლებული მედიანის მართობულია. $AB=1$, ხოლო BC გვერდის სიგრძე მთელი რიცხვით გამოისახება. გამოთვალეთ ABC სამკუთხედის პერიმეტრი.

ამოცანა 5 5 ქულა

წრეწირზე მონიშნულია ასი წითელი და ერთი ლურჯი წერტილი. რომელია მეტი და რამდენით: იმ მრავალკუთხედების რაოდენობა, რომელთა ერთი წვერო ლურჯია, ხოლო დანარჩენი წვეროები წითელი ფერისაა, თუ იმ მრავალკუთხედების რაოდენობა, რომელთა ყველა წვერო წითელია?

IX კლასი

ამოცანა 1 5 ქულა

ცნობილია, რომ კვადრატული სამწევრი ax^2-bx+c იღებს მთელ მნიშვნელობებს, როცა $x=0$, $x=1$ და $x=2$. აჩვენეთ, რომ x-ის ნებისმიერი მთელი მნიშვნელობისათვის მოცემული სამწევრის მნიშვნელობაც მთელია.

ამოცანა 2 5 ქულა

რამდენი m რიცხვის შერჩევა შეიძლება ისე, რომ $x^2-2010x+m=0$ განტოლებას ორი განსხვავებული ნატურალური ამონახსნი ჰქონდეს?

ამოცანა 3 5 ქულა

არსებობს თუ არა ნატურალური რიცხვი, რომლის კვადრატის ციფრთა ჯამი 2010-ის ტოლია?

ამოცანა 4 5 ქულა

წერტილი მოძრაობს სიბრტყეზე ისე, რომ დროის t მომენტში ($t>0$) დაშორებულია კოორდინატთა სათავიდან $|t-2000|+|t-2010|$ მანძილით. იპოვეთ t-ს ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც წერტილი მინიმალური მანძილითაა დაშორებული კოორდინატთა სათავიდან.

ამოცანა 5 5 ქულა

გია და ანა თამაშობენ მართკუთხედის ფორმის 21×2010 უჯრებიან დაფაზე. თითოეული რიგრიგობით ირჩევს ნებისმიერი ზომის კვადრატს, რომლის გვერდებიც უჯრების გვერდებისაგან შედგენილ ბადეზე მდებარეობენ და ღებავს მას. იგებს ის, ვინც ბოლო უჯრას შეღებავს. ორჯერ ერთიდაიმავე უჯრის შეღებვა არ შეიძლება. თამაშს იწყებს გია. როგორ უნდა ითამაშოს გიამ, რომ ყოველთვის მოიგოს?

X კლასი

ამოცანა 1 5 ქულა

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული f ფუნქცია x-ის ყოველი არანულოვანი მნიშვნელობისათვის აკმაყოფილებს პირობას

$$f(x-1/x)+4x^2+4/x^2+3=0.$$

იპოვეთ $f(2010)$.

ამოცანა 2 5 ქულა

იპოვეთ m პარამეტრის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც წერტილები $A(1;m)$, $B(2;1-m)$, $C(3;m)$ და $D(m;3m-1)$ ეკუთვნიან კვადრატული სამწევრის გრაფიკს.

ამოცანა 3 5 ქულა

დაამტკიცეთ, რომ $a_1, a_2, \ \dots \ , a_{2011}$ რიცხვებს შორის, სადაც $a_n = \underbrace{20102010\cdots2010}_{4n \text{ ციფრი}}$, მოიძებნება რიცხვი, რომელიც იყოფა 2011-ზე.

ამოცანა 4 5 ქულა

ABC მახვილკუთხა სამკუთხედში H წერტილი წარმოადგენს სიმაღლეების გადაკვეთის წერტილს. ცნობილია, რომ $2AC^2-\sqrt{3}AC\cdot BH-3BH^2=0$. იპოვეთ $\angle ABC$.

ამოცანა 5 5 ქულა

გია და ანა თამაშობენ მართკუთხედის ფორმის 21×2010 უჯრებიან დაფაზე. თითოეული რიგრიგობით ირჩევს ნებისმიერი ზომის კვადრატს, რომლის გვერდებიც უჯრების გვერდებისაგან შედგენილ ბადეზე მდებარეობენ და ღებავს მას. იგებს ის, ვინც ბოლო უჯრას შეღებავს. ორჯერ ერთიდაიმავე უჯრის შეღებვა არ შეიძლება. თამაშს იწყებს გია. როგორ უნდა ითამაშოს გიამ, რომ ყოველთვის მოიგოს?

XI-XII კლასები

ამოცანა 1 5 ქულა

დაამტკიცეთ, რომ არ არსებობს ნატურალურ რიცხვთა ისეთი (m,n) წყვილი რომელიც დააკმაყოფილებდა შემდეგ პირობას $n^{2m} = 2010m^n$.

ამოცანა 2 5 ქულა

ცნობილია, რომ $ax^{2010} + bx^{1005} + c = 0$ განტოლებას არ გააჩნია ნამდვილი ფესვი და $b > a + c$. დაადგინეთ c რიცხვის ნიშანი.

ამოცანა 3 5 ქულა

ABC სამკუთხედის AC გვერდზე M წერტილი აღებულია ისე, რომ $AM - MC = BC - AB$. დაამტკიცეთ, რომ $r_1 + r_2 > r$, სადაც r_1, r_2 და r წარმოადგენენ შესაბამისად ABM, MBC და ABC სამკუთხედებში ჩახაზული წრეწირების რადიუსებს.

ამოცანა 4 5 ქულა

ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} (x+y)^{2010} = z \\ (y+z)^{2010} = x \\ (z+x)^{2010} = y \end{cases}$$

ამოცანა 5 5 ქულა

$ABCD$ კვადრატის შიგნით შემთხვევით იღებენ S წერტილს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ASB კუთხე არ იქნება ბლაგვი.

მათემატიკაში ეროვნული სასწავლო ოლიმპიადის

დასკვნითი ტურის ამოცანები

VII კლასი

ამოცანა 1 5 ქულა

დაამტკიცეთ, რომ თუ p მარტივი რიცხვია და $p>3$, მაშინ p^2-1 იყოფა 24-ზე.

ამოცანა 2 5 ქულა

იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები, თუ ბისექტრისა ამ სამკუთხედს ორ ტოლფერდა სამკუთხედად ყოფს (განიხილეთ ყველა შესაძლო შემთხვევა).

ამოცანა 3 5 ქულა

A და B პუნქტებიდან ერთდროულად ორი ავტომობილი გამოვიდა, რომლებიც ერთმანეთის შემხვედრი მიმართულებით მუდმივი სიჩქარით მოძრაობდნენ. შეხვედრის შემდეგ A -დან გამოსული ავტომობილი 9 წუთში ჩავიდა B პუნქტში, ხოლო B -დან გამოსული 16 წუთში ჩავიდა A პუნქტში. რა დრო მოანდომა თითოეულმა ავტომობილმა მთელი გზის გავლას?

ამოცანა 4 5 ქულა

რამდენი ისეთი ნატურალური რიცხვი არსებობს, რომლის ჩანაწერი ბოლოვდება 2010 -ით და ამ ოთხი ციფრის წაშლით მიღებული რიცხვის ჯერადია?

ამოცანა 5 5 ქულა

ა) ააგეთ ისეთი ორი ოთხკუთხედი, რომ ერთი მათგანი მეორის შიგნით მდებარეობდეს და შიგნით მდებარე ოთხკუთხედის პერიმეტრი გარე ოთხკუთხედის პერიმეტრზე მეტი იყოს.

ბ) დაამტკიცეთ, რომ თუ ერთი ოთხკუთხედი მეორე ოთხკუთხედის შიგნით მდებარეობს, მაშინ შიგნით მდებარე ოთხკუთხედის პერიმეტრი გარე ოთხკუთხედის გაორკეცებულ პერიმეტრზე ნაკლებია.

VIII კლასი

ამოცანა 1 5 ქულა

ა) იპოვეთ ყველა ნატურალური რიცხვი, რომელიც 6-ით იწყება და ამ პირველი ციფრის წაშლით მიღებული რიცხვი საწყის რიცხვზე 25-ჯერ ნაკლებია.

ბ) აჩვენეთ, რომ არ არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი, რომლის პირველი ციფრის წაშლით მიღებული რიცხვი საწყის რიცხვზე 35-ჯერ ნაკლებია.

ამოცანა 2 5 ქულა

იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები, თუ ერთი წვეროდან დაშვებული სიმაღლე და მედიანა კუთხეს სამ ტოლ ნაწილად ყოფს.

ამოცანა 3 5 ქულა

აჩვენეთ, რომ $15x^2 - 7y^2 = 9$ განტოლებას არ გააჩნია მთელი ამონახსნები.

ამოცანა 4 5 ქულა

ხუთი მეკობრე იყოფს ოქროს მონეტებს შემდეგი წესით: მეკობრეთა კაპიტანი იღებს მონეტების რაოდენობის 20%-ს, შემდეგ მეორე მეკობრე იღებს დარჩენილი მონეტების 20%-ს, შემდეგ მესამე - დარჩენილის 20%-ს, ასევე იქცევა მეოთხე და მეხუთე მეკობრეც. ბოლოს კი დარჩენილ მონეტებს ისინი თანაბრად იყოფენ. მონეტების რა მინიმალური რაოდენობა უნდა ჰქონდეთ მეკობრეებს, რომ ამ წესით მოახერხონ ფულის განაწილება და რამდენი მონეტა შეხვდება მეკობრეთა კაპიტანს ამ შემთხვევაში? მონეტის გაჭრა აკრძალულია.

ამოცანა 5 5 ქულა

ა) ააგეთ ისეთი ორი ამოზნექილი ოთხკუთხედი, რომ ერთი მათგანი მეორის შიგნით მდებარეობდეს და შიგნით მდებარე ოთხკუთხედის დიაგონალების სიგრძეთა ჯამი გარე ოთხკუთხედის სიგრძეთა ჯამზე მეტი იყოს.

ბ) დაამტკიცეთ, რომ თუ ერთი ამოზნექილი ოთხკუთხედი მეორე ამოზნექილი ოთხკუთხედის შიგნით მდებარეობს, მაშინ შიგნით მდებარე ოთხკუთხედის დიაგონალების სიგრძეთა ჯამი გარე ოთხკუთხედის დიაგონალების სიგრძეთა გაორკეცებულ ჯამზე ნაკლებია.

IX კლასი

ამოცანა 1 5 ქულა

ვთქვათ $x, y > 0$. S წარმოადგენს უმცირესს რიცხვებიდან $x, y+\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$. რა უდიდესი მნიშვნელობა შეიძლება მიიღოს S რიცხვმა?

ამოცანა 2 5 ქულა

ცნობილია, რომ z ნამდვილი რიცხვისთვის $z+\frac{1}{z}$ მთელი რიცხვია. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისთვის $z^n+\frac{1}{z^n}$ მთელი რიცხვია.

ამოცანა 3 5 ქულა

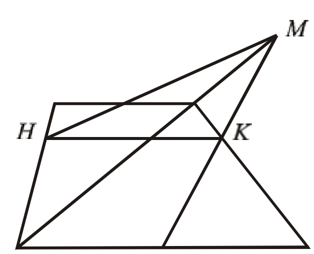
გიორგი იმყოფება წრიული ფორმის აუზის ცენტრში, ხოლო ირაკლი აუზის ნაპირზე. ირაკლიმ არ იცის ცურვა, მაგრამ მისი სიჩქარე ხმელეთზე 4-ჯერ აღემატება გიორგის ცურვის სიჩქარეს. აღწერეთ, როგორ უნდა მოიქცეს გიორგი, რომ მიცუროს ნაპირზე და გაექცეს ირაკლის, თუ ცნობილია, რომ გიორგი და ირაკლი ნაპირზე ერთნაირი სიჩქარით დარბიან. პასუხი დაასაბუთეთ.

ამოცანა 4 5 ქულა

ორი ამოზნექილი ოთკუთხედის გვერდების შუაწერტილები ერთმანეთს ემთხვევა. აჩვენეთ, რომ ამ მრავალკუთხედის ფართობები ტოლია.

ამოცანა 5 5 ქულა

ტრაპეციის დიაგონალის გაგრძელებაზე ნებისმიერად აღებული M წერტილიდან გავლებულია ორი წრფე, რომლებიც შესაბამისად გადიან ზედა და ქვედა ფუძის შუაწერტილებზე და ტრაპეციის ფერდებს კვეთენ H და K წერტილებში. დაამტკიცეთ, რომ HK მონაკვეთი ტრაპეციის ფუძეების პარალელურია.



X კლასი

ამოცანა 1 5 ქულა

აჩვენეთ, რომ თუ $a=4+\sqrt{15}$, მაშინ $a^n-\left[a^n\right]=1-\frac{1}{a^n}$, სადაც $[x]$ სიმბოლო აღნიშნავს უდიდეს მთელ რიცხვს, რომელიც არ აღემატება x-ს.

ამოცანა 2 5 ქულა

ვთქვათ $a, b, c>0$. შეიძლება თუ არა ერთდროულად სამართლიანი იყოს უტოლობები $a(1-b)>\frac{1}{4}$, $b(1-c)>\frac{1}{4}$, $c(1-a)>\frac{1}{4}$?

ამოცანა 3 5 ქულა

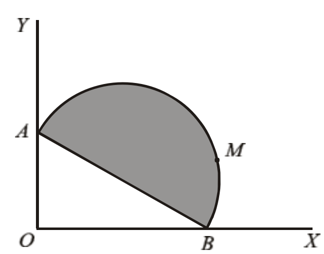
იპოვეთ x^2+ax+b და x^2+cx+d კვადრატული სამწევრების ყველა ისეთი წყვილი, რომელთათვისაც შესრულდება შემდეგი პირობა: $x^2+ax+b=0$ განტოლების ფესვებია c და d, ხოლო $x^2+cx+d=0$ განტოლების ფესვებია a და b.

ამოცანა 4 5 ქულა

სიბრტყეზე მოცემულია ოთხი წერტილი ისე, რომ ნებისმიერ ორ წერტილს შორის მანძილი ეკუთვნის $\left[\sqrt{2}; 2\right]$ ინტერვალს. აჩვენეთ, რომ ეს წერტილები კვადრატის წვეროებია.

ამოცანა 5 5 ქულა

AB დიამეტრის მქონე ნახევარწრის ფორმის სხეული ეყრდნობა XOY მართი კუთხის გვერდებს A და B წერტილებში (იხ. სურათი). ცნობილია, რომ $OA=6$. სხეული დაეშვა OX გვერდზე ისე, რომ A წერტილმა გაიარა AO მონაკვეთი, ხოლო B წერტილი მოძრაობდა OX გვერდზე. იპოვეთ AB რკალზე მდებარე M წერტილის მიერ განვლილი გზის სიგრძე, თუ ის მოძრაობის დაწყებამდე მართი კუთხის OX გვერდიდან 2 ერთეულით იყო დაშორებული, ხოლო OY გვერდიდან კი – 3 ერთეულით.



XI-XII კლასები

ამოცანა 1 5 ქულა

ფირმა ამზადებს A და B ტიპის სათამაშოებს. A ტიპის თითოეული სათამაშოს დასამზადებლად 25 ლარი და 5 შუქდიოდია საჭირო, ხოლო B ტიპის თითოეული სათამაშოს დასამზადებლად კი – 40 ლარი და 4 შუქდიოდი. რამდენი A ტიპის და რამდენი B ტიპის სათამაშო უნდა დაამზადოს ფირმამ 2000 ლარით და 320 შუქდიოდით, რომ მათი გაყიდვის შედეგად მაქსიმალური მოგება მიიღოს, თუ თითოეულ A ტიპის სათამაშოზე მისი მოგება შეადგენს 6 ლარს, ხოლო თითოეულ B ტიპის სათამაშოზე კი – 10 ლარს?

ამოცანა 2 5 ქულა

$a_1, a_2, ..., a_n, ...$ რიცხვთა მიმდევრობა აგებულია შემდეგი წესით: $a_1 = 3,$ $a_{k+1} = a_k + k + 2,$ $k \geq 1.$ დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისთვის

$$\left(1-\frac{1}{a_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{a_2}\right)\cdot ... \cdot\left(1-\frac{1}{a_n}\right) > \frac{1}{3}.$$

ამოცანა 3 5 ქულა

დაფაზე დაწერილია ერთიდან ჩვიდმეტის ჩათვლით ნატურალური რიცხვები $1, 2, ..., 17$. ორი მოთამაშე რიგრიგობით შლის რიცხვებს მანამ, სანამ დაფაზე არ დარჩება ორი რიცხვი. თუ მათი ჯამი 5-ის ჯერადი იქნება, მაშინ თამაშს იგებს პირველი მოთამაშე, წინააღმდეგ შემთხვევაში – მეორე მოთამაშე. თამაშს იწყებს პირველი მოთამაშე. როგორ უნდა ითამაშოს მან, რომ ყოველთვის მოიგოს?

ამოცანა 4 5 ქულა

ვთქვათ $f(x) = x^2 - 9x + 25$. არსებობს თუ არა სამი რიცხვისგან შემდგარი M სიმრავლე შემდეგი თვისებით: თუ $x \in M$, მაშინ $f(x) \in M$?

მართკუთხედს ვუწოდოთ სამკუთხედში ჩახაზული, თუ ამ მართკუთხედის ყველა წვერო მდებარეობს სამკუთხედის გვერდებზე. ნებისმიერი Δ სამკუთხედისათვის განვსაზღვროთ $f\left(\Delta\right)=\dfrac{S_\Delta}{d^2}$ რიცხვი, სადაც S_Δ წარმოადგენს Δ-ს ფართობს, ხოლო d არის Δ-ში ჩახაზული ყველა შესაძლო მართკუთხედის დიაგონალებს შორის უმცირესი.

იპოვეთ $f:\Lambda\to\mathbb{R}$ ასახვის უმცირესი მნიშვნელობა, სადაც Λ წარმოადგენს ყველა სამკუთხედის სიმრავლეს.

I ტურის ამოცანების ამოხსნები

VII.1. პირობის თანახმად $25-3=22$-მა მოსწავლემ იცის ან ჭადრაკის ან შაშის თამაში. მაშინ $22-16=6$-მა მოსწავლემ იცის მხოლოდ შაშის თამაში. ამიტომ $11-6=5$-მა მოსწავლემ იცის როგორც ჭადრაკის, ისე შაშის თამაში.

პასუხი: 5-მა მოსწავლემ.

VII.2. ჩამონათვალში 3-ის ჯერადი რიცხვი ყველაზე მეტი რომ იყოს ამისათვის n უნდა იყოს რაც შეიძლება დიდი. n-ისთვის შესაძლო უდიდესი მინიშვნელობაა $n=9\cdot47+8$, რომელშიც 3-ის ჯერადი რიცხვების რაოდენობა ტოლი იქნება $3\cdot47+2=143$-ის.

პასუხი: 143

VII.3. ვთქვათ მთელი გზაა x კმ. მაშინ შუა გზამდე დარჩენილი მანძილია $\dfrac{x}{2}-\dfrac{2x}{5}=\dfrac{x}{10}$. პირობის თანახმად $\dfrac{2x}{5}-\dfrac{x}{10}=15$. აქედან $x=50$.

პასუხი: 50 კმ.

VII.4. ვთქვათ, კვადრატის გვერდია a, ხოლო ჩამოჭრილი მართკუთხედების გვერდები შესაბამისად $a,\ x$ და $a,\ a-x$. პირობის თანახმად $ax=2a(a-x)$, საიდანაც

მივიღებთ $x=\frac{2}{3}a$. ე.ი. ჩამოჭრილი მართკუთხედების გვერდები იქნება: $a, \frac{2}{3}a$ და $a, \frac{1}{3}a$, პერიმეტრები $2a+\frac{4}{3}a=\frac{10}{3}a$ და $2a+\frac{2}{3}a=\frac{8}{3}a$, მათი შეფარდება კი - $\frac{5}{4}$.

პასუხი: $\frac{5}{4}$.

VII.5. დიდი კუბის ასაწყობად გამოიყენება $4\cdot4\cdot4=64$ მცირე კუბი.

ა) ყოველ წახნაგთან 4 ასეთი მცირე კუბია. $4\cdot6=24$, ანუ მხოლოდ ერთი წახნაგი შეეღება 24 მცირე კუბს.

ბ) შეუღებავი დარჩება დიდ კუბზე ორი ერთეულით ნაკლები ზომის მქონე კუბის ასაწყობად საჭირო მცირე კუბები. მათი რაოდენობაა $2\cdot2\cdot2=8$.

პასუხი: ა) 24 ბ) 8.

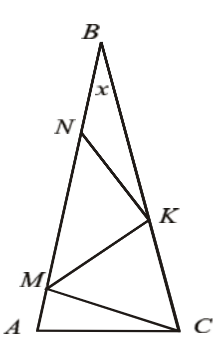
VIII.1. ჩამონათვალში 4-ის ჯერადი რიცხვი ყველაზე მეტი რომ იყოს ამისათვის n უნდა იყოს რაც შეიძლება დიდი. n- ისთვის შესაძლო უდიდესი მნიშვნელობაა $n=57\times11+10=637=159\times4+1$, რომელშიც 4-ის ჯერადი რიცხვების რაოდენობა ტოლი იქნება 159-ის.

პასუხი: 159.

VIII.2. ვთქვათ ვაჟების რაოდენობაა $3x$, მაშინ გოგონების რაოდენობა იქნება $2x$. პირობის თანახმად მეორე წრეში $\frac{21x}{100}$ ვაჟი და $\frac{20x}{100}$ გოგონა გავიდა, ამიტომ $\frac{21x}{100}-\frac{20x}{100}=42$, საიდანაც მივიღებთ, რომ $x=4200$. მათემატიკის ოლიმპიადის I ტურში მონაწილეობდა $5\times4200=21000$ მოსწავლე.

პასუხი: 21000 მოსწავლე.

VIII.3. ვთქვათ $\angle B=x$. მაშინ, პირობის თანახმად $\angle NKB=x$, ამიტომ $\angle KNM=2x$, როგორც NBK სამკუთხედის გარე კუთხე. რადგან NKM სამკუთხედი ტოლფერდაა, ამიტომ $\angle KMN=$ $\angle KNM=2x$. ანალოგიურად გვექნება, $\angle MKC=\angle KCM=3x$ და $\angle AMC=\angle A=\angle C=4x$. აქედან, $4x+4x+x=180^\circ$ და $x=20^\circ$.



პასუხი: $\angle B=20^\circ$.

VIII.4. საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ სამნიშნა რიცხვისა და მისი ციფრთა ჯამის სხვაობა ცხრის ჯერადია. მართლაც, დავუშვათ სამნიშნა რიცხვი შეიცავს a ასეულს, b ათეულს და c ერთეულს, მაშინ ეს სამნიშნა რიცხვი წარმოდგება შემდეგი სახით: $\overline{abc}=100a+10b+c$, ხოლო ამ რიცხვისა და მისი ციფრთა ჯამის სხვაობა ტოლია $\overline{abc}-(a+b+c)=100a+10b+c-a-b-c=99a+9b=9(9a+b)$.

VIII.5. ვთქვათ მართკუთხედის სიგრძეა x, ხოლო სიგანე y. პირობის თანახმად $4(x+y)=xy$. აქედან $x=\dfrac{4y}{y-4}=4+\dfrac{16}{y-4}$. საიდანაც ან $y-4=1 \Rightarrow \quad y=5$, $x=20$; ან

$y-4=2 \Rightarrow \quad y=6$, $x=12$; ან $y-4=4 \Rightarrow \quad y=8$, $x=8$; ან $y-4=8 \Rightarrow \quad y=12$, $x=6$; ან

$y-4=16 \Rightarrow \quad y=20$, $x=5$.

პასუხი: სიგრძე 20, სიგანე 5; ან სიგრძე 12, სიგანე 6; ან სიგრძე 8, სიგანე 8.

IX.1. $(4+\sqrt{15})(\sqrt{6}-\sqrt{10})\sqrt{4-\sqrt{15}}=-\sqrt{(4+\sqrt{15})^2(\sqrt{10}-\sqrt{6})^2(4-\sqrt{15})}=$
$-\sqrt{(4+\sqrt{15})^2(\sqrt{10}-\sqrt{6})^2(4-\sqrt{15})}=-\sqrt{(4+\sqrt{15})(16-2\sqrt{60})(16-15)}=-\sqrt{4(4+\sqrt{15})(4-\sqrt{15})}=-2$.

IX.2. პირობის თანახმად $a=5k+4$, ამიტომ

$a^2+2a=(5k+4)^2+2(5k+4)=25k^2+50k+24=5(5k^2+10k+4)+4.$

პასუხი: 4 -ის.

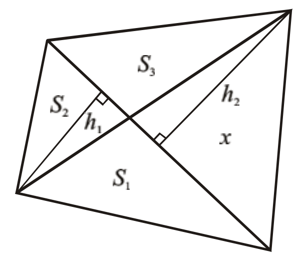
IX.3. მეორე განტოლებიდან გამოვსახოთ y და ჩავსვათ პირველ განტოლებაში. მივიღებთ, რომ $2x+k(1+3x)=3 \Leftrightarrow (2+3k)x=3-k$. რადგან სისტემას ამონახსნი არ გააჩნია, ამიტომ გვექნება $\begin{cases} 2+3k=0 \\ 3-k\neq 0 \end{cases}$, საიდანაც მივიღებთ, $k=-2/3$.

პასუხი: $k=-2/3$.

IX.4. ვთქვათ ალბომის ღირებულებაა x, ხოლო წიგნის y. მაშინ ამოცანის პირობის თანახმად გვექნება $7x+3y=2(3x+4y)$, საიდანაც $x=5y$. ამიტომ ალბომის ღირებულება წიგნის ღირებულებაზე მეტია $4y$-ით. მაშასადამე, წიგნის ფასთან შედარებით ალბომის ღირებულება 400 %-ით მეტია.

პასუხი: 400 %-ით.

IX.5. ერთმანეთთან შევაფარდოთ და შევადაროთ სამკუთხედის ფართობები რომელთაც საერთო წვერო გააჩნიათ, ხოლო ფუძეები კი ერთ წრფეზე არიან განლაგებული. მაშინ სურათზე მოცემული შემთხვევისთვის გვექნება: $\frac{S_2}{S_3}=\frac{S_1}{x}=\frac{h_1}{h_2}$, საიდანაც



$x=\frac{S_1S_3}{S_2}$. ამიტომ, $S=\frac{S_1S_3}{S_2}+S_1+S_2+S_3$.

პასუხი: $S=\frac{S_1S_3}{S_2}+S_1+S_2+S_3$

X.1. პირობის თანახმად გვექნება, რომ $\frac{1}{a+c}-\frac{1}{b+c}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+c}$, საიდანაც მივიღებთ $\frac{b-a}{b+c}=\frac{c-b}{a+b} \Rightarrow b^2-a^2=c^2-b^2$, ე.ი. a^2, b^2, c^2 არითმეტიკული პროგრესიაა.

X.2. ამოცანის პირობიდან x და $-x$ -თვის მივიღებთ შემდეგ სისტემას $\begin{cases}2f(x)+3f(-x)=x^2-x\\2f(-x)+3f(x)=x^2+x\end{cases}$, საიდანაც გვაქვს $f(x)=\frac{1}{5}x^2+x$.

პასუხი: $f(x)=\frac{1}{5}x^2+x$.

X.3. რადგან $1+\sqrt{2}$ არის $x^2+ax+b=0$ განტოლების ერთერთი ფესვი, ამიტომ გვექნება $\left(1+\sqrt{2}\right)^2+a\left(1+\sqrt{2}\right)+b=0 \Rightarrow (3+a+b)+(a+2)\sqrt{2}=0$. პირობის თანახმად $3+a+b$ რაციონალური რიცხვია, ხოლო $(a+2)\sqrt{2}$ კი – ირაციონალური, ამიტომ ტოლობას ადგილი ექნება თუ $3+a+b=0$ და $(a+2)\sqrt{2}=0$, საიდანაც მივიღებთ $a=-2,\ b=-1$.

პასუხი: $a=-2,\ b=-1$.

X.4. დავწეროთ სამკუთხედის უტოლობა სამივე გვერდის მიმართ. გვექნება, $\begin{cases}a+3<2a-2+5\\2a-2<a+3+5\\5<a+3+2a-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<a\\a<10\\4<3a\end{cases}$, საიდანაც გვაქვს: $4/3<a<10$.

პასუხი: $4/3<a<10$.

X.5. ვთქვათ, სამკუთხედის კათეტების სიგრძეებია a და b, ხოლო მედიანის m. გვაქვს $a+2m=16$ და $b+2m=18$. პითაგორას თეორემის ძალით

$(16-2m)^2+(18-2m)^2=(2m)^2$. საიდანაც მივიღებთ $m^2-34m+145=0 \Rightarrow m_1=5, m_2=27$. $m_2=27$ არ ვარგა. ამიტომ გვექნება $a=6, b=8$.

პასუხი: $a=6, b=8$.

XI-XII.1. პირობის თანახმად $b^2=ac$ და $(a+2b)+(a+3b+c)=2(2a+b+c) \Rightarrow c=3b-2a,$

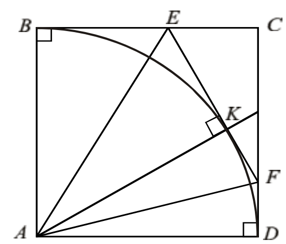
საიდანაც $b^2=a(3b-2a) \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2=3\frac{b}{a}-2$ ანუ $q^2-3q+2=0,$ სადაც $q=\frac{b}{a}$ არის გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი. ამ განტოლების ამოხსნით მივიღებთ $q_1=1,\ q_2=2$.

პასუხი: 1 ან 2.

XI-XII. 2. შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი დადებითი a და b რიცხვისთვის მართებულია უტოლობა $\frac{a}{a+b}<\frac{a+b}{a+2b} \Leftrightarrow a^2+2ab<a^2+2ab+b^2=\left(a+b\right)^2$. ჩვენ შემთხვევაში $a=2009200920092009$, ხოლო $b=10000000000$.

პასუხი: $\frac{2009210920092009}{2009220920092009}$.

XI-XII.3. ცხადია, $AK \perp EF$ და $AB=AK=AD$ (სამივე რადიუსია). განვიხილოთ $\triangle ABE$ და $\triangle AKE$. ამ სამკუთხედებში $AB=AK$, ხოლო AE საერთოა, ამიტომ $\triangle ABE = \triangle AKE$ და $\angle BAE=\angle KAE$. ანალოგიური მსჯელობით მტკიცდება, რომ $\angle DAF=\angle KAF$.ვთქვათ, $\angle BAE=\angle KAE=\alpha$ და $\angle DAF=\angle KAF=\beta$, მაშინ $2\alpha+2\beta=90°$ და $\angle EAF=\alpha+\beta=45°$.



პასუხი: $\angle EAF=45°$.

XI-XII.4. კოსინუსების თეორემის თანახმად, თუ ABC სამკუთხედში AB არის უდიდესი გვერდი, მაშინ ეს სამკუთხედი იქნება მახვილკუთხა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $AC^2+BC^2>AB^2$. ამოცანის პირობის თანახმად, რადგანაც $4+a<6+a<8+a$, სამკუთხედი იქნება მახვილკუთხა მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც $\left(4+a\right)^2+\left(6+a\right)^2>\left(8+a\right)^2 \Leftrightarrow a^2+4a-12>0 \Leftrightarrow a<-6$ ან $a>2$. რადგან სამკუთხედის გვერდის სიგრძე უარყოფითი არ შეიძლება იყოს, ამიტომ $a>2$.

პასუხი: $a>2$.

XI-XII.5. ვთქვათ, a პარამეტრის რაღაც მნიშვნელობებისთვის მოცემულ უტოლობათა სისტემას აქვს მხოლოდ ერთი ამონახსნი. შევნიშნოთ, რომ თუ (x, y) არის ამ სისტემის ამონახსნი, მაშინ (y, x) ასევე იქნება მისი ამონახსნი და ამიტომ მოცემული სისტემის ერთადერთი ამონახსნი მხოლოდ (x, x)–ს სახის შეიძლება იყოს. თუ (x, x) ჩავსვამთ სისტემის ერთერთ უტოლობაში, მივიღებთ $x \ge x^2 + 4a^2$ ანუ $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4a^2 - \frac{1}{4} \le 0$, რომელსაც უნდა გააჩნდეს მხოლოდ ერთი ამონახსნი. ეს კი შესაძლებელია მხოლოდ $a = \pm\frac{1}{4}$ შემთხვევაში. ახლა შევამოწმოთ, აქვს თუ არა მოცემულ სისტემას ერთადერთი ამონახსნი, როცა $a = \pm\frac{1}{4}$. თუ ჩავსვათ სისტემაში $a = \pm\frac{1}{4}$ და შევკრებთ მასში შემავალ უტოლობებს, გვექნება $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \le 0$, საიდანაც მივიღებთ, რომ $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{2}$ არის ამ სისტემის ერთადერთი ამონახსნი.

პასუხი: $\pm\frac{1}{4}$.

II ტურის ამოცანების ამოხსნები

VII.1. ვთქვათ x სამნიშნა რიცხვია, მაშინ $\overline{xx} = \overline{x000} + x = 1000x + x = 1001x$. ეს რიცხვი კი 1001-ის ჯერადია.

VII.2. ვთქვათ კვადრატის გვერდია a, მაშინ მისი პერიმეტრი იქნება $4a$, ხოლო ფართობი a^2. მართკუთხედის გვერდები იქნება $\frac{a}{2}$ და $\frac{3a}{2}$, ხოლო ფართობი $\frac{3a^2}{4}$. ამიტომ მართკუთხედის ფართობი $\frac{a^2}{4}$-ით, ანუ 25%-ით ნაკლებია კვადრატის ფართობზე.

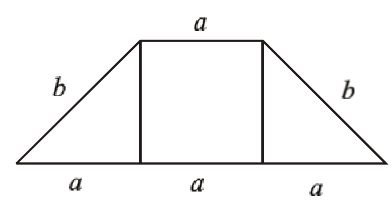
VII.3. ვთქვათ წრეში n მოსწავლე და მათგან m გოგონაა გაერთიანებული. პირობის თანახმად $\frac{9n}{20} < m < \frac{n}{2}$. ე.ი. უნდა მოვძებნოთ უმცირესი ნატურალური n რიცხვი, რომ-ლისთვისაც $\left(\frac{9n}{20}; \frac{n}{2}\right)$ შუალედი მთელ რიცხვს შეიცავს. ასეთია $n = 11$. მაშინ $m = 5$.

პასუხი: წრეში 11 მოსწავლე და მათ შორის 5 გოგონაა.

VII.4. თუ ნატურალური რიცხვის ჩანაწერი 10 ნულით ბოლოვდება, მაშინ ეს რიცხვი უნაშთოდ იყოფა 10^{10}-ზე. მაგრამ, $10^{10} = 2^{10} \cdot 5^{10}$. ამიტომ უნდა ავიღოთ იმდენი თანა-მამრავლი, რომ მათი გადამრავლებით დაგროვდეს არანაკლებ 10 ცალი ლუწი რიცხვი და ზუსტად 10 ცალი 5. ასეთი რიცხვია 45, რადგან 1-დან 45-მდე 22 ლუწი რიცხვი და 9 ცალი 5-ის ჯერადი რიცხვია, ამასთან $25 = 5 \cdot 5$.

პასუხი: $n = 45$.

VII.5. ვთქვათ სამკუთხედის ფერდების სიგრძეები a სმ-ია, ხოლო ფუძე b სმ. სამკუთხედების მიდგმით მიიღება შემდეგი სახის ოთხკუთხედი: როგორც ნახაზიდან ჩანს, მიღებული ოთხკუთხედის პერიმეტრია $4a + 2b = 2(2a + b) = 20$ სმ.



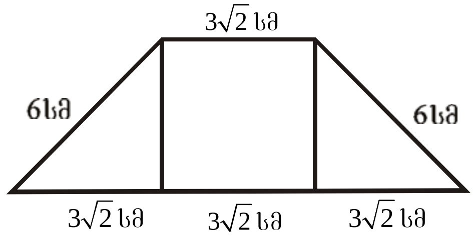
პასუხი: 20 სმ

VIII.1. $n^2 + n + 1$ კენტია, რადგან $n^2 + n + 1 = n(n+1) + 1$, ხოლო $n(n+1)$ ლუწი რიცხვია. $n^2 + n + 1$ რიცხვის უახლოესი რიცხვები, რომლებიც ნატურალური რიცხვების კვადრატს წარმოადგენენ, n^2 და $(n+1)^2$ რიცხვებია. მართლაც $n^2 + n + 1 > n^2$ და $n^2 + n + 1 < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. მივიღეთ, რომ $n^2 < n^2 + n + 1 < (n+1)^2$. მაგრამ n^2 და $(n+1)^2$ ერთმანეთის მომდევნო ნატურალური რიცხვების კვადრატებია, ამიტომ $n^2 + n + 1$ ვერ იქნება ნატურალური რიცხვის კვადრატი.

VIII.2. ვთქვათ n არის ტელევიზორის თავდაპირველი ფასი, ხოლო m ფასის შეცვლამდე გაყიდული ტელევიზორების რაოდენობაა. მაშინ $n \cdot m$ იქნება ფასის შეცვლამდე შემოსული თანხა. თუ ფასი p%-ით შეიცვალა, მაშინ შემოსული თანხა იქნება $(1 + \frac{p}{100}) n \cdot 0,96m$. მივიღეთ განტოლება: $(1 + \frac{p}{100}) n \cdot 0,96m = 1,08nm.$ აქედან, $p = 12,5\%$.

პასუხი: ფასი 12,5%-ით გაიზარდა.

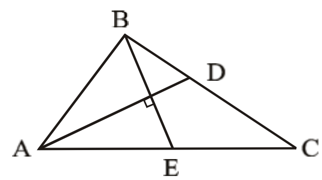
VIII.3. კვადრატის დიაგონალებზე გაჭრით ოთხი ტოლი ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედი მიიღება, რომელთა ჰიპოტენუზები კვადრატის გვერდის ანუ 6 სმ, ხოლო კათეტები კვადრატის დიაგონალის ნახევარი ანუ $3\sqrt{2}$ სმ იქნება. ამ სამკუთხედების მიდგმით მიიღება შემდეგი სახის ტრაპეცია:



როგორც ნახაზიდან ჩანს, მიღებული ოთხკუთხედის პერიმეტრია $12(\sqrt{2}+1)$ სმ.

პასუხი: $12(\sqrt{2}+1)$ სმ

VIII.4. ABE სამკუთხედში AD ბისექტრისაცაა და სიმაღლეც, ამიტომ $AB = AE = 1 \Rightarrow AC = 2.$



სამკუთხედის უტოლობიდან $AC - AB < BC < AC + AB$,

საიდანაც ვღებულობთ $1 < BC < 3 \Rightarrow BC = 2.$

პასუხი: 5სმ

VIII.5. ვთქვათ A იმ მრავალკუთხედების სიმრავლეა, რომელთა ყველა წვერო წითელია, ხოლო B იმ მრავალკუთხედების სიმრავლე, რომელთა ერთი წვერო ლურჯია, ხოლო დანარჩენი კი - წითელი. თუ A სიმრავლის ყოველ n-კუთხედს დავუმატებთ ლურჯ წვეროს, მივიღებთ B სიმრავლის $(n+1)$-კუთხედს. აქედან ვასკვნით, რომ B სიმრავლეში ელემენტების რაოდენობა იმდენით მეტია A სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობაზე, რამდენი სამკუთხედიც არის B სიმრავლეში, რადგან სამკუთხედების მიღება A სიმრავლის მრავალკუთხედებიდან აღნიშნული წესით არ შეიძლება. ამ სამკუთხედების რაოდენობა წითელი ბოლოების მქონე მონაკვეთების რაოდენობის ტოლია. ეს რაოდენობა კი $\frac{100 \cdot 99}{2}$-ს უდრის.

პასუხი: 4950

IX.1. პირობიდან გამომდინარე $c, a-b+c, 4a-2b+c$ მთელი რიცხვია, ამიტომ რიცხვები $c, a-b, 2a, 2b, a+b$ აგრეთვე მთელი რიცხვებია. თუ $x = 2k$ ლუწია, მაშინ $ax^2 - bx + c =$ $4k^2a - 2bk + c$ მთელი რიცხვია. ანალოგიურად, თუ $x = 2k+1$ კენტია, მაშინ $ax^2 - bx + c =$ $4k^2a + 4ka + (a-b) - 2kb + c$ მთელი რიცხვია.

IX.2. ვიეტის ფორმულების ძალით $x_1 + x_2 = 2010$ და $x_1 \cdot x_2 = m$. პირველი განტოლებას ნატურლურ რიცხვთა სიმრავლეში გააჩნია $(k, 2010-k)$, $k = 1, \cdots, 2009$ ტიპის ამონახსნები. ადვილი შესამჩნევია, რომ m-ის ყველა შესაძლო ვარიანტებს გვაძლევს $(k, 2010-k)$, $k = 1, \cdots, 1004$ ამონახსნები.

პასუხი: 1004

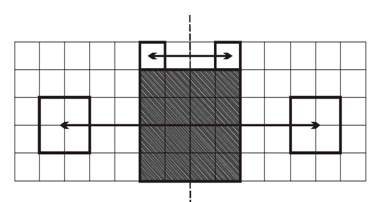
IX.3. შევნიშნოთ, რომ 2010 იყოფა 3-ზე და არ იყოფა 9-ზე, ამიტომ რიცხვი, რომლის ციფრთა ჯამი 2010-ის ტოლია, გაიყოფა 3-ზე და არ გაიყოფა 9-ზე. მაგრამ თუ რიცხვი არ იყოფა 3-ზე, მაშინ არც მისი რომელიმე ხარისხი გაიყოფა სამზე, ამიტომ მოცემული რიცხვი სამზე უნდა იყოფოდეს. მაგრამ, თუ რიცხვი იყოფა 3-ზე, მაშინ მისი კვადრატი გაიყოფა 9-ზე; შედეგად შეუძლებელია მისი ციფრთა ჯამი იყოს 2010.

პასუხი: არ არსებობს

IX.4. თუ $0 < t < 2000$, მაშინ სხეული დაშორებულია სათავიდან $2000 - t + 2010 - t = 4010 - 2t > 10$ მანძილით. თუ $t > 2010$ მაშინ სხეული დაშორებულია სათავიდან მანძილით $t - 2000 + t - 2010 = 2t - 4010 > 10$. როცა $2000 \le t \le 2010$, მაშინ სხეული $t - 2000 + 2010 - t = 10$ მანძილით არის დაშორებული სათავიდან. მაშასადამე სხეული მინიმალური მანძილითაა დაშორებული კოორდინატთა სათავიდან დროის $2000 \le t \le 2010$ შუალედში.

პასუხი: დროის $2000 \le t \le 2010$ შუალედში.

IX.5. გიამ პირველ სვლაზე უნდა შეღებოს 20×20 ზომის კვადრატი, რომლის ერთი გვერდი მართკუთხა დაფის დიდ გვერდზე მდებარეობს, ხოლო კვადრატის სიმეტრიის ღერძი კი მართკუთხედის სიმეტრიის ღერძს ემთხვევა (იხ. ნახაზი 5×14 ზომის დაფისთვის, ამ შემთხვევაში პირველ სვლაზე შეღებილია 4×4 ზომის კვადრატი).



მაშინ ამ სიმეტრიის ღერძის მიმართ მართკუთხედის დარჩენილი შეუღებავი ნაწილი იყოფა ორ ტოლ ნაწილად. ამის შემდეგ ანას ყოველ სვლას გია პასუხობს სიმეტრიული სვლით, ამასთან გიას ყოველთვის შეუძლია ანას მიერ შერჩეული კვადრატის სიმეტრიული (შეუღებავი) კვადრატის მოძებნა, რადგან ანა ვერ შეღებავს კვადრატს, რომელიც სიმეტრიის ღერძს გადაკვეთს.

X.1. ჯერ ვაჩვენოთ, რომ არსებობს x, რომლისთვისაც $x - 1/x = 2010$. მართლაც $x - 1/x = 2010 \Leftrightarrow x^2 - 2010x - 1 = 0$, ხოლო მიღებულ კვადრატული განტოლების ამონახსნებია $x = 1005 \pm \sqrt{1005^2 + 1}$. თუ ავიყვანთ $x - 1/x = 2010$-ს კვადრატში, გვექნება $x^2 + 1/x^2 = 2010^2 + 2$. მაშასადამე $f(2010) = -4(2010^2 + 2) - 3$.

პასუხი: $f(2010) = -4(2010^2 + 2) - 3$.

X.2. პირველი გზა. რადგან $A(1;m)$ და $C(3;m)$ წერტილებს ტოლი ორდინატები აქვთ, ამიტომ თუ ისინი პარაბოლაზე მდებარეობენ, მაშინ ამ პარაბოლის წვეროს აბსცისა იქნება $x_0=(1+3)/2=2$ ხოლო მისი განტოლება კი შეიძლება ჩავწეროთ $y=a(x-2)^2+k$ $(a\neq 0)$ სახით. ამოცანის პირობიდან გვექნება განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} a+k=m, \\ k=1-m, \\ a(m-2)^2+k=3m-1. \end{cases}$$

საიდანაც მივიღებთ $a=2m-1$ და $(2m-1)(m-2)^2+1-m=3m-1$. უკანასკნელი განტოლებიდან გვექნება $(2m-1)(m-2)^2=2(2m-1)$ საიდანაც მივიღებთ $m=1/2,$ $m=2+\sqrt{2},$ ან $m=2-\sqrt{2}$. შევნიშნოთ, რომ როცა $m=1/2$, მაშინ $a=0$ და არ ვარგა.

პასუხი: $m=1/2,$ $m=2+\sqrt{2}$ ან $m=2-\sqrt{2}$.

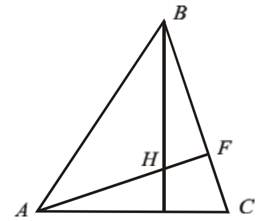
მეორე გზა. ვთქვათ, მოცემული წერტილები ax^2+bx+c კვადრატული სამწევრის გრაფიკზე მდებარეობენ, მაშინ ამოცანის პირობებიდან გვექნება სისტემა

$$\begin{cases} a+b+c=m, \\ 4a+2b+c=1-m, \\ 9a+3b+c=m, \\ am^2+bm+c=3m-1. \end{cases}$$

თუ სისტემის მეორე განტოლებას გამოვაკლებთ პირველს მივიღებთ $3a+b=1-2m$. თუ მესამე განტოლებას გამოვაკლებთ პირველს მივიღებთ $8a+2b=0$. სისტემიდან $\begin{cases} 3a+b=1-2m, \\ 8a+2b=0. \end{cases}$ გვექნება $a=2m-1$, $b=-8m+4$, $c=7m-3$. გვაქვს m-ის მიმართ განტოლება $2m^3-9m^2+8m-2=0$, რომლის ერთ-ერთი ფესვია $1/2$. მაშინ $2m^3-9m^2+8m-2=(2m-1)(m^2-4m+2)=0$. საიდანაც მივიღებთ $m=1/2,$ $m=2+\sqrt{2}$ ან $m=2-\sqrt{2}$.

X.3. ვთქვათ, ასეთი რიცხვი არ მოიძებნა, მაშინ დირიხლეს პრინციპის თანახმად a_1, a_2, $\cdots$, a_{2011}, რიცხვებს შორის მოიძებნება ორი რიცხვი a_k, a_m $(k<m)$ ისეთი, რომ 2011-ზე გაყოფისას ნაშთში მიიღება ერთიდაიგივე რიცხვი. მაგრამ $a_m-a_k=a_{m-k}\cdot 10^{4k}$ და ამასთან 10^{4k} და 2011 ურთიერთმარტივი რიცხვებია. მაშასადამე, a_{m-k} იყოფა 2011-ზე. მივიღეთ წინააღმდეგობა.

X.4. მოცემული ტოლობის ორივე მხარე გავყოთ BH^2-ზე. მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას $2\left(\frac{AC}{BH}\right)^2-\sqrt{3}\frac{AC}{BH}-3=0$, საიდანაც $\frac{AC}{BH}=\sqrt{3}.$ $\triangle ABC$ -ში BC გვერდზე დავუშვათ AF სიმაღლე და განვიხილოთ $\triangle AFC$ და $\triangle BFH$, იხ. სურათი. ცხადია



$\angle FAC=\angle FBH \Rightarrow \Delta AFC \sim \Delta BFH \Rightarrow \frac{AF}{BF}=\frac{AC}{BH}=\sqrt{3}$. გვექნება $\text{tg}\angle ABF=\frac{AF}{BF}=\sqrt{3}$, ე.ი $\angle ABC=60^\circ$.

X.5. იხ IX.5

XI-XII.1. დავუშვათ საწინააღმდეგო: ვთქვათ, $n^{2m}=2010m^n$ ტოლობა სრულდება რომელიმე ნატურალურ რიცხვთა (m,n) წყვილისთვის. მაშინ, რადგან $n^{2m}=2\cdot 1005m^n$ ტოლობის მარცხენა მხარე იყოფა 2-ზე, ამიტომ n^{2m} იყოფა 2-ზე. აქედან გამომდინარეობს, რომ n იყოფა 2-ზე. ვთქვათ α და β არის შესაბამისად მაქსიმალური მთელი არაუარყოფითი რიცხვები, რომლებისთვისაც n იყოფა 2^α-ზე და m იყოფა 2^β-ზე, მაშინ n^{2m} იყოფა $2^{2\alpha m}$-ზე, ხოლო $2010\cdot m^n$ იყოფა $2^{\beta n+1}$-ზე, რის გამოც უნდა შესრულდეს ტოლობა $2\alpha\cdot m=\beta\cdot n+1$. ამ ტოლობის შესრულება კი შეუძლებელია, რადგან n ლუწი რიცხვია.

XI-XII.2. თუ $ax^{2010}+bx^{1005}+c=0$ განტოლებას არ გააჩნია ნამდვილი ფესვი, მაშინ არც კვადრატულ განტოლებას $ay^2+by+c=0$ ($y=x^{1005}$) გააჩნია ნამდვილი ფესვი. აქედან გამომდინარეობს, რომ $f(y)=ay^2+by+c$ ფუნქცია იმის მიხედვით $a>0$ თუ $a<0$ ან სულ დადებითია ან სულ უარყოფითი. მაგრამ პირობის თანახმად $f(-1)=a-b+c<0$. ამიტომ $c=f(0)<0$.

პასუხი: c უარყოფითია.

XI-XII.3. პირობის თანახმად $AB+AM=BC+MC,$ ამიტომ $P_{ABM}=P_{MBC}$, სადაც P_{ABM} და P_{MBC} წარმოადგენენ ABM და MBC სამკუთხედების პერიმეტრებს. ახლა, იმის გათვალისწინებით, რომ $BM<MC+BC$ და მაშასადამე,

$$P_{MBC}=P_{ABM}=AB+AM+BM<AB+AM+MC+BC=AB+AC+BC=P_{ABC},$$

სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსის გამოსათვლელი ფორმულის გამოყენებით, გვექნება $r_1 + r_2 = \frac{2S_{ABM}}{P_{ABM}} + \frac{2S_{MBC}}{P_{MBC}} = 2\frac{S_{ABM} + S_{MBC}}{P_{ABM}} = \frac{2S_{ABC}}{P_{ABM}} > \frac{2S_{ABC}}{P_{ABC}} = r$.

XI-XII.4. სისტემაში მოცემული ტოლობებიდან ცხადია, რომ $x, y, z \geq 0$, ამიტომ

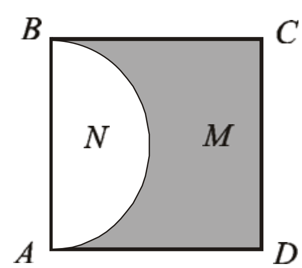
$$x + y = \sqrt[2010]{z} \quad (1)$$
$$y + z = \sqrt[2010]{x} \quad (2)$$
$$z + x = \sqrt[2010]{y} \quad (3)$$

(1) და (2) ტოლობებიდან მივიღებთ, რომ $y = \sqrt[2010]{z} - x = \sqrt[2010]{x} - z$, ანუ $z + \sqrt[2010]{z} = x + \sqrt[2010]{x}$.

ცხადია, რომ თუ $z > x$, მაშინ $z + \sqrt[2010]{z} > x + \sqrt[2010]{x}$, ხოლო თუ $z < x$, მაშინ $z + \sqrt[2010]{z} < x + \sqrt[2010]{x}$, ე.ი. $z = x$. ანალოგიურად მივიღებთ, რომ $z = y$, ე.ი. $x = y = z$. აქედან გვაქვს: $(2x)^{2010} = x$ ანუ $x\left(2^{2010} \cdot x^{2009} - 1\right) = 0$. საიდანაც $x = 0$ ან $x = \frac{1}{2 \cdot \sqrt[2009]{2}}$.

პასუხი: $x = y = z = 0$ ან $x = y = z = \frac{1}{2\sqrt[2009]{2}}$.

XI-XII.5. შევნიშნოთ, რომ AB გვერდზე, როგორც დიამეტრზე, შემოხაზული ნახევარწრეწირი $ABCD$ კვადრატს ორ N და M ფიგურად ყოფს, სადაც N-ით ნახევარწრეა აღნიშნული, იხ. სურათი. ცხადია, რომ ASB კუთხე არ იქნება ბლაგვი მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა $S \in M$. მაშინ p ალბათობა იმისა, რომ ASB კუთხე არ იქნება ბლაგვი უდრის $p = \frac{S_M}{S_{ABCD}}$, სადაც S_{ABCD} კვადრატის ფართობია და უდრის AB^2-ს, ხოლო S_M კი M ფიგურის ფართობია და უდრის $AB^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \left(1 - \frac{\pi}{8}\right)AB^2$. მაშასადამე $p = 1 - \frac{\pi}{8}$.



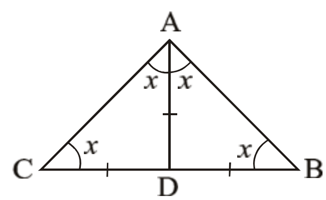
პასუხი: $p = 1 - \frac{\pi}{8}$.

დასკვნითი ტურის ამოცანების ამოხსნები

VII.1. პირველი გზა. რადგან $p>3$ და მარტივია, ამიტომ ის 6-ზე გაყოფისას იძლევა ნაშთს 1-ს ან 5-ს და მაშასადამე შეიძლება წარმოდგენილი იქნას ან როგორც $p=6k+1$ ან როგორც $p=6k+5$, სადაც k ნატურალურია. პირველ შემთხვევაში $p^2-1=36k^2+12k+1-1=12k(3k+1)$. თუ k ლუწია, მაშინ $k(3k+1)$ ლუწია, თუ k კენტია, მაშინ $3k+1$ ლუწია და $k(3k+1)$ ისევ ლუწი გამოდის. ამიტომ $12k(3k+1)$ იყოფა 24-ზე. მეორე შემთხვევაში $p^2-1=36k^2+60k+25-1=12k(3k+5)+24$. თუ k ლუწია, მაშინ $k(3k+5)$ ლუწია, თუ k კენტია, მაშინ $3k+5$ ლუწია და $k(3k+5)$ ისევ ლუწი გამოდის. ამიტომ $12k(3k+5)+24$ იყოფა 24-ზე.

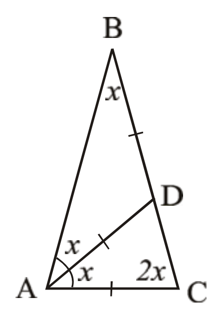
მეორე გზა. განვიხილოთ ერთმანეთის მომდევნო სამი რიცხვის ნამრავლი $(p-1)p(p+1)$. რადგან $p>3$ და მარტივია, ამიტომ ის არ იყოფა არც 2-ზე და არც 3-ზე. რადგან p კენტია, ამიტომ $p-1$ და $p+1$ ერთმანეთის მომდევნო ლუწი რიცხვებია და ამიტომ ერთ-ერთი მათგანი იყოფა 2-ზე, ხოლო მეორე 4-ზე. გარდა ამისა, $p-1$, p და $p+1$ ერთმანეთის მომდევნო რიცხვებიდან ერთ-ერთი უნდა გაიყოს 3-ზე. ამიტომ $p-1$ და $p+1$ რიცხვებიდან ერთ-ერთი იყოფა 3-ზე. მაშასადამე $p^2-1=(p-1)(p+1)$ იყოფა 24-ზე.

VII.2. განვიხილოთ ორი შემთხვევა:



1) $AC = AB$ ამ შემთხვევაში $\angle C = \angle ACD = \angle BAD = \angle B = x$,

$4x=180°,\ x=45°$ (იხ. ნახაზი) და $\angle C=\angle B=45°,\ \angle A=90°$.



2) $AC \neq AB$. ვთქვათ AD ბისექტრისაა და $AC = AD = DB$. აღვნიშნოთ, $\angle B = x$. მაშინ, $\angle A = 2x, \angle BAD = \angle CAD = x$. $\angle ACD = \angle ADC = 2x$.

აქედან $5x=180°$, $\angle B = x = 36°$ $\angle A = \angle C = 2x = 72°$.

პასუხი: $\angle C=\angle B=45°,\ \angle A=90°$, ან $\angle A = \angle C = 72^0$, $\angle B = 36^0$.

VII.3. ვთქვათ A-დან გამოსული ავტომობილის სიჩქარეა V_A, B-დან გამოსულის – V_B. მაშინ A-დან გამოსული ავტომობილი შეხვედრამდე გაივლიდა $16V_B$ მანძილს, ხოლო

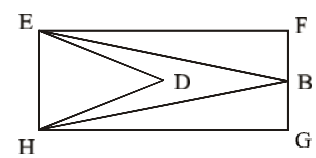
B-დან გამოსული – $9V_A$ მანძილს. შეხვედრამდე დახარჯული დრო A-დან გამოსული ავტომობილისთვის იქნება $\frac{16V_B}{V_A}$ წუთი, ხოლო B-დან გამოსულისთვის – $\frac{9V_A}{V_B}$ წუთი. მივიღებთ ტოლობას: $\frac{16V_B}{V_A}=\frac{9V_A}{V_B}$, ანუ, $3V_A=4V_B$. ამ ტოლობიდან ვღებულობთ, რომ მანძილი A და B პუნქტებს შორის ერთის მხრივ უდრის $21V_A$ – ს, მეორეს მხრივ $28V_B$ -ს, ხოლო დახარჯული დრო წუთებში - შესაბამისად 21 წუთს და 28 წუთს.

პასუხი: 21 წუთი, 28 წუთი.

VII.4. ვთქვათ ეს რიცხვია $\overline{x2010}=x\cdot 10000+2010$. მაშინ 2010-ის წაშლით მივიღებთ x-ს და მაშასადამე, $\overline{x2010}$ არის x-ის ჯერადი: $x\cdot 10000+2010=kx$, $(k-10000)x=2010$. ამიტომ x არის 2010-ის გამყოფი. ე.ი. არსებობს იმდენი ასეთი რიცხვი, რამდენი გამყოფიც აქვს 2010-ს. ამ რიცხვს აქვს ოთხი მარტივი გამყოფი: 2, 3, 5 და 67, ამიტომ, როგორც ადვილი შესამოწმებელია, სულ ექნება ექნება $2^4=16$ ცალი ნატურალური გამყოფი.

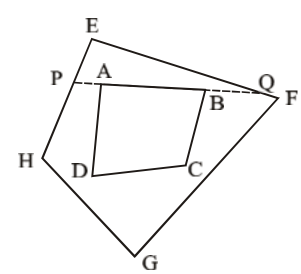
პასუხი: 16.

VII.5. ა) ავაგოთ $EFGH$ მართკუთხედი გვერდებით $EF=a$ და $FG=b$. მასში ჩავხაზოთ $EBHD$ ოთხკუთხედი, რომლის B წვერო FG გვერდის შუაწერტილს ემთხვევა, ხოლო D წვერო - $EFGH$ მართკუთხედის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილს. რადგან HB დახრილი HG გეგმილზე მეტია, ამიტომ $EB=HB>HG=a$. ანალოგიურად, $ED=HD>\frac{1}{2}HG=\frac{1}{2}a$. ამიტომ, თუ $a>2b$, მაშინ $P_{EBHD}>3a>2a+2b=P_{EFGH}$.



ბ) $ABCD$ ოთხკუთხედის AB გვერდი გავაგრძელოთ $EFGH$ ოთხკუთხედის გვერდების გადაკვეთამდე (იხ. სურათი). მიღებული PQ მონაკვეთის სიგრძე AB გვერდის სიგრძეზე ნაკლები არ არის. გარდა ამისა

$$PQ\le PE+EQ,\quad PQ\le PH+HG+GF+FQ.$$



ამასთან უკანსკნელი უტოლობებიდან ერთი მაინც მკაცრია, ამიტომ ამ უტოლობების შეკრება გვაძლევს: $2AB\le 2PQ<P_{EFGH}$

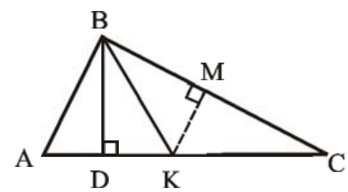
(P_{EFGH}-ით აღნიშნულია $EFGH$ ოთხკუთხედის პერიმეტრი). თუ ამ მსჯელობას გავიმეორებთ $ABCD$ ოთხკუთხედის დანარჩენი გვერდებისთვის, მივიღებთ: $2P_{ABCD}=2(AB+CD+DE+EA)<4P_{EFGH}$. საიდანაც $P_{ABCD}<2P_{EFGH}$.

VIII.1. ა) ვთქვათ ასეთი რიცხვი არსებობს და მისი პირველი ციფრის წაშლის შედეგად მიღებული რიცხვია N. თუ N რიცხვის ციფრთა რაოდენობას აღვნიშნავთ n-თი, მაშინ ამოცანის პირობა გვაძლევს განტოლებას $25N = N + 6\cdot 10^n$. ეს უკანასკნელი გვაძლევს ტოლობას $N = 25\cdot 10^{n-2}$.

პასუხი: $625\cdot 10^k$ ტიპის რიცხვები, სადაც $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

ბ) წინა მსჯელობის ანალოგიური მსჯელობა გვაძლევს განტოლებას $35N = N + m\cdot 10^n \Rightarrow 34N = m\cdot 10^n$, სადაც $m = 1, 2, 3, \ldots, 9$. უკანასკნელი ტოლობის მარცხენა მხარე იყოფა 17-ზე, ხოლო მარჯვენა კი არა. მაშასადამე ასეთი N რიცხვი არ არსებობს.

VIII.2. მოცემულია $BD \perp AC,\ AK = KC$, $\angle ABD = \angle DBK = \angle KBC$. გავავლოთ $KM \perp BC$. სამკუთხედებს ABD, BKD და BKM ტოლი აქვთ ჰიპოტენუზა და მახვილი კუთხე, ამიტომ ისინი ტოლია და $AD = DK = KM \Rightarrow KM = \dfrac{KC}{2}$. აქედან $\angle C = 30°$,



$\angle DBC = 90° - \angle KCM = 60°$, $\angle KBC = \dfrac{1}{2}\angle DBC = 30°$, $\angle B = 90°$, $\angle A = 60°$.

პასუხი: $\angle A = 60°, \angle B = 90°, \angle C = 30°.$

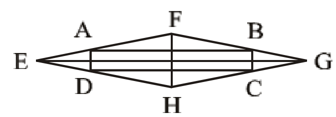
VIII.3. დაუშვათ განტოლებას გააჩნია მთელი ამონახსნი. შევნიშნოთ, რომ y იყოფა 3-ზე: $y = 3y_1$. მაშინ $5x^2 - 21y_1^2 = 3$. ანალოგიურად, თუ აღვნიშნავთ $x = 3x_1$, გვექნება $15x_1^2 - 7y_1^2 = 1$. ამიტომ $7y_1^2 = 15x_1^2 - 1$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ y_1^2 3-ზე გაყოფისას ნაშთში გვაძლევს 2-ს. მეორეს მხრივ, ადვილი შესამოწმებელია, რომ y_1^2 3-ზე გაყოფისას ნაშთში ყოველთვის იძლევა ან 0-ს, ან 1-ს. მართლაც, თუ $y_1 = 3k$, მაშინ $y_1^2 = 9k^2$, თუ $y_1 = 3k+1$, მაშინ $y_1^2 = 3(3k^2+2k)+1$, $y_1 = 3k+2$, მაშინ $y_1^2 = 3(3k^2+4k+1)+1$, მივიღეთ წინააღმდეგობა, ამიტომ განტოლებას მთელი ამონახსნი არ გააჩნია.

VIII.4. მონეტების თავდაპირველი რაოდენობა აღვნიშნოთ N-ით. მაშინ თავდაპირველად პირველმა მეკობრემ აიღო $a_1 = \dfrac{N}{5}$ მონეტა, მეორემ – $a_2 = N\left(1 - \dfrac{1}{5}\right) : 5$, მესამემ აიღო $a_3 = N\left(1 - \dfrac{1}{5}\right)^2 : 5$ მონეტა, მეოთხემ – $a_4 = N\left(1 - \dfrac{1}{5}\right)^3 : 5$, ხოლო მეხუთემ –

$a_5 = N\left(1-\frac{1}{5}\right)^4 : 5$. მეკობრეების მიერ თავდაპირველი წილების აღების შემდეგ დარჩენილი მონეტების რაოდენობაა $N\left(1-\frac{1}{5}\right)^5 = N\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^5$. პირობის თანახმად ეს რიცხვი უნდა იყოს 5-ის ჯერადი. $N\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^5 = 5k \Rightarrow N = \frac{5^6}{4^5}k$. უკანასკნელი ტოლობიდან ნათელია, რომ $k = 4^5 = 1024$-სთვის N მიიღებს უმცირეს მთელ მნიშვნელობას $N = 5^6 = 15625$. თითოეულმა მეკობრემ ბოლო ეტაპზე აიღო 1024 მონეტა.

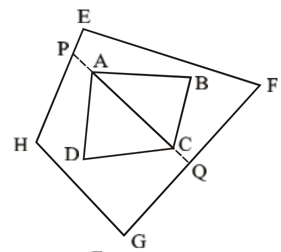
პასუხი: $N = 5^6 = 15625$; $5^5 + 1024 = 4149$.

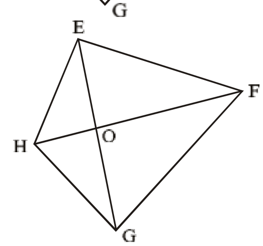
VIII.5. ა) ავაგოთ $EFGH$ რომბი, რომლის დიაგონალების სიგრძეებია $EG = d_1,\ FH = d_2$ და $d_1 > 2d_2$. მასში ჩავხაზოთ $ABCD$



მართკუთხედი, რომლის AB და BC გვერდები შესაბამისად EG და FH დიაგონალების ტოლია, ამასთან $AB = \frac{3}{4}EG = \frac{3}{4}d_1$. მაშინ $AC + BD > 2AB = \frac{3}{2}d_1 > d_1 + d_2$.

ბ) $ABCD$ ოთხკუთხედის AC დიაგონალი გავაგრძელოთ $EFGH$ ოთხკუთხედის გვერდების გადაკვეთამდე (იხ. სურათი). მიღებული PQ მონაკვეთის სიგრძე AB გვერდის სიგრძეზე ნაკლები არ არის, გარდა ამისა, $PQ < PE + EF + FQ,\ PQ < PH + HG + GQ.$ ამ უტოლობების შეკრება გვაძლევს: $2AC \le 2PQ < P_{EFGH}$ (P_{EFGH}-ით აღნიშნულია $EFGH$ ოთხკუთხედის პერიმეტრი). თუ ანალოგიურ მსჯელობას ჩავატარებთ BD დიაგონალის მიმართაც, მივიღებთ $AC + BD < P_{EFGH}$. დასამტკიცებელი დაგვრჩა, რომ $P_{EFGH} < 2(EG + FH)$. აღვნიშნოთ O-თი EG და FH დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი. სამკუთხედის უტოლობის გამო





$HE < HO + OE,\ EF < EO + OF, \quad FG < FO + OG,\ GH < HO + OG.$ ამ უტოლობების შეკრება გვაძლევს $P_{EFGH} < 2(EG + FH)$.

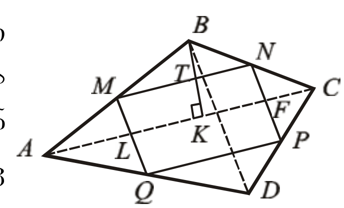
IX.1. პირობის თანახმად S აკმაყოფილებს უტოლობებს: $x \ge S$, $y + \frac{1}{x} \ge S$, $\frac{1}{y} \ge S$. მაშინ $y \le \frac{1}{S}$, $\frac{1}{x} \le \frac{1}{S}$, $S \le y + \frac{1}{x} \le \frac{2}{S}$, საიდანაც გვექნება $S^2 \le 2 \Rightarrow S \le \sqrt{2}$. თუ $y = \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ მაშინ ვღებულობთ $S = \sqrt{2}$.

პასუხი: $\sqrt{2}$.

IX.2. რადგან $z+\frac{1}{z}\in\mathbb{Z}$, მაშინ $\left(z+\frac{1}{z}\right)^2=z^2+2+\frac{1}{z^2}\in\mathbb{Z}$ და ამიტომ $z^2+\frac{1}{z^2}\in\mathbb{Z}$. შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი $n\ge 2$ ნატურალური რიცხვისთვის სამართლიანია ტოლობა: $z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}=\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)-\left(z^{n-1}+\frac{1}{z^{n-1}}\right)$. ამიტომ, თუ ავიღებთ $n=2$ გვექნება: $z^3+\frac{1}{z^3}\in\mathbb{Z}$. ამ მსჯელობის გაგრძელებით შეგვიძლია ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისთვის ვაჩვენოთ, რომ $z^n+\frac{1}{z^n}$ მთელი რიცხვია.

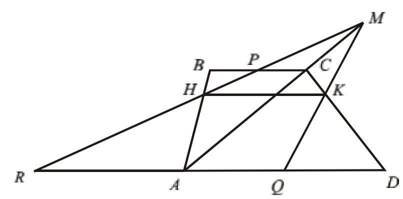
IX.3. აუზის ცენტრი აღვნიშნოთ O-თი, ხოლო რადიუსი კი – R-ით. C-თი აღვნიშნოთ წრეწირი ცენტრით O წერტილში და რადიუსით r. შევარჩიოთ r ისე, რომ გიორგიმ შემდეგი ტაქტიკით მოახერხოს გაქცევა: გიორგი მიცურდება C წრეწირამდე, შემდეგ C წრეწირის გასწვრივ დაიწყებს ცურვას მანამ, სანამ ის და ირაკლი არ განთავსდებიან O ცენტრის სხვადასხვა მხარეს (ცხადია, ამის მიღწევა შესაძლებელია იმ შემთხვევაში, თუ $r<\frac{R}{4}$) და შემდეგ გაცურავს ნაპირისაკენ ისე, რომ ირაკლი მას ვერ დაიჭერს. ამისათვის საჭიროა, რომ მან $R-r$ მანძილი გაცუროს უფრო სწრაფად, ვიდრე ირაკლი შეძლებს πR მანძილის გარბენას. ე.ი. $R-r<\frac{\pi R}{4}\Rightarrow r>\left(1-\frac{\pi}{4}\right)R$. მაშასადამე, თუ გიორგი r რადიუსს შეარჩევს ისე, რომ $\left(1-\frac{\pi}{4}\right)R<r<\frac{R}{4}$, მაშინ ის შეძლებს გაქცევას.

IX.4. ვთქვათ პირველი ოთხკუთხედია $ABCD$ და ამ ორი ოთხკუთხედის გვერდები ერთმანეთთან იკვეთება M, N, P და Q წერტილებში. თუ ვაჩვენეთ, რომ $S_{ABCD}=2S_{MNPQ}$, მაშინ ნაჩვენები გვექნება, რომ მეორე ოთხკუთხედის ფართობიც ტოლია $2S_{MNPQ}$ და მაშასადამე მოცემული ამოზნექილი ოთხკუთხედების ფართობები ერთმანეთის ტოლია.



გავავლოთ AC და BD დიაგონალები. AC მონაკვეთის გადაკვეთის წერტილები MQ და NP მონაკვეთებთან აღვნიშნოთ შესაბამისად L და F წერტილებით. ამოცანის პირობის თანახმად M, N, P და Q წერტილები $ABCD$ ოთხკუთხედის გვერდების შუა წერტილებია. ამიტომ, MN და QP წარმოადგენს შესაბამისად ABC და ADC სამკუთხედების შუახაზებს, მაშასადამე $MN\parallel AC\parallel QP$. ანალოგიურად, $MQ\parallel BC\parallel NP$. რადგან $MNPQ$ ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდები პარალელურებია, $MNPQ$ ოთხკუთხედი წარმოადგენს პარალელოგრამს. AC დიაგონალზე დავუშვათ BK მართობი, რომლის გადაკვეთის წერტილი MN მონაკვეთთან აღვნიშნოთ T-თი.

$S_{MBN} = \frac{1}{2} MN \cdot BT = \frac{1}{2} MN \cdot TK = \frac{1}{2} S_{LMNF}$. ასევე, $S_{QDP} = \frac{1}{2} S_{LFPQ}$. უკანასკნელი ორი ტოლობიდან დავასკვნით, რომ $S_{MBN} + S_{QDP} = \frac{1}{2} S_{MNPQ}$. ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ, რომ $S_{MAQ} + S_{NCP} = \frac{1}{2} S_{MNPQ}$. მაშასადამე, $S_{MBN} + S_{QDP} + S_{MAQ} + S_{NCP} = S_{MNPQ}$, საიდანაც გამომდინარეობს დასამტკიცებელი ტოლობა $S_{ABCD} = 2S_{MNPQ}$.



IX.5. ვთქვათ, P და Q არის $ABCD$ ტრაპეციის BC და AD ფუძეების შუაწერტილები, M წერტილი AC დიაგონალის გაგრძელებაზე, ხოლო R წერტილი MP და AD წრფეების გადაკვეთის წერტილია. რადგან AHR და BPH სამკუთხედები მსგავსია და $PC \parallel AR$, ამიტომ $\frac{AH}{HB} = \frac{AR}{BP} = \frac{AR}{PC} = \frac{AM}{CM}$. ასევე მტკიცდება, რომ $\frac{DK}{KC} = \frac{AM}{CM}$. მაშასადამე $\frac{DK}{KC} = \frac{AH}{HB}$, საიდანაც ვღებულობთ $HK \parallel BC$.

X.1. $\frac{1}{a} = 4 - \sqrt{15} < 1$. რადგან $0 < \frac{1}{a^n} < 1$, ამიტომ $\left[a^n\right] < a^n + \frac{1}{a^n} < \left[a^n\right] + 2$.

$a^n + \frac{1}{a^n} = \left(4 + \sqrt{15}\right)^n + \left(4 - \sqrt{15}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 4^{n-k} \sqrt{15}^k \left(1 + (-1)^k\right)$. აღნიშნული გაშლიდან ნათელია, რომ $a^n + \frac{1}{a^n}$ მთელი რიცხვია. მაშასადამე, $a^n + \frac{1}{a^n} = \left[a^n\right] + 1$.

X.2. ვთქვათ, სამივე უტოლობა სამართლიანია. გვექნება $a(1-a)b(1-b)c(1-c) > \frac{1}{64}$. მაგრამ $a(1-a) = 1/4 - (1/2 - a)^2 \le 1/4$. თუ გავითვალისწინებთ ანალოგიურ უტოლობებს, მივიღებთ $a(1-a)b(1-b)c(1-c) \le \frac{1}{64}$. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ მოცემული უტოლობები ერთდროულად სამართლიანი ვერ იქნება.

X.3. ვიეტის თეორემის თანახმად გვექნება შემდეგი განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} c + d = -a, \\ cd = b, \\ a + b = -c, \\ ab = d. \end{cases} \qquad (1)$$

მაშინ (1) სისტემის პირველი და მესამე ტოლობებიდან მივიღებთ, რომ $b=d$ და მაშასადამე

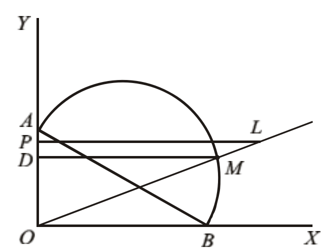
$$\begin{cases} c+d=-a \\ cd=b \\ a+b=-c \\ ab=d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=d \\ a+c=-b \\ cb=b \\ ab=b \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} c=a=1 \\ b=d=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} b=d=0 \\ a=-c \end{cases} \end{array} \right.$$

ანუ, მივიღეთ შემდეგი კვადრატული სამწევრების წყვილები $\left(x^2+x-2, x^2+x-2\right)$ და $\left(x^2+ax, x^2-ax\right)$ ნებისმიერი $a\in\mathbb{R}$ - თვის.

პასუხი: $\left(x^2+x-2, x^2+x-2\right)$ და $\left(x^2+ax, x^2-ax\right)$ ნებისმიერი $a\in\mathbb{R}$ - თვის.

X.4. ვთქვათ A,B,C და D მოცემული წერტილებია. შევნიშნოთ, რომ მოცემული წერტილებიდან ნებისმიერი სამი ადგენს სამკუთხედს. განვიხილოთ სამკუთხედი ABC. მაშინ გვექნება $\cos\widehat{A}=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}\geq\dfrac{2+2-4}{2AB\cdot AC}=0$. ამიტომ $\widehat{A}\leq 90°$. ანალოგიურად დავასკვნით, რომ $\widehat{B}\leq 90°$, $\widehat{C}\leq 90°$, $\widehat{D}\leq 90°$. შევნიშნოთ, რომ რადგან $\widehat{D}\leq 90°$ ამიტომ D წერტილი არ შეიძლება იყოს ABC სამკუთხედის შიგნით. მივიღეთ, რომ $ABCD$ ოთხკუთხედი ამოზნექილია. რადგან ასეთი ოთხკუთხედის შიდა კუთხეების ჯამი 360° -ია, ამიტომ $ABCD$ მართკუთხედია. თუ დაუშვებთ, რომ $AB=a, BC=b$, $a\neq b$ და $a,b\in[\sqrt{2},2]$ მივიღებთ წინააღმდეგობას: $AC=\sqrt{a^2+b^2}>2$.

X.5. შევნიშნოთ, რომ თუ AB დიამეტრის ნახევარწრეწირს შევავსებთ წრეწირამდე მაშინ ის O წერტილზე გაივლის და ამიტომ $\angle AOM=\angle ABM$ როგორც AM რკალზე დაყრდნობილი კუთხეები. საიდანაც მივიღებთ, რომ მოძრაობის მთელი დროის განმავლობაში M წერტილი იმყოფება OM სხივზე (რადგან $\angle ABM$ არ იცვლება). პირობის თანახმად გვექნება $DM=3$, $DO=2$, $AD=AO-DO=4$, $OM=\sqrt{DO^2+DM^2}=\sqrt{13}$ და



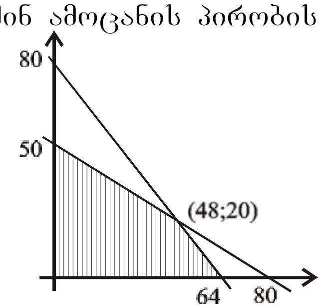
$AM=\sqrt{AD^2+DM^2}=5$. OM სხივზე L-ით აღვნიშნოთ წერტილი რომელიც OY გვერდიდან AM მონაკვეთის სიგრძით იქნება დაშორებული, მაშინ $PL=AM=5$. შევნიშნოთ, რომ მოძრაობის დაწყების შემდეგ M წერტილი დაიწყებს OM სხივის გასწრივ „ზემოთ“ მოძრაობას L წერტილისკენ, მიაღწევს მას და შემდეგ გააგრძელებს მოძრაობას OM სხივის გასწრივ „ქვემოთ“. OPL და ODM სამკუთხედების მსგავსებიდან გვაქვს $\dfrac{PL}{DM}=\dfrac{OL}{OM}$, საიდანაც $OL=\dfrac{PL\cdot OM}{DM}=\dfrac{5\cdot\sqrt{13}}{3}$.

ამიტომ $ML=\frac{5\sqrt{13}}{3}-\sqrt{13}=\frac{2\sqrt{13}}{3}$, რაც წარმოადგენს M წერტილის მიერ განვლილ გზას, როცა ის მოძრაობს M წერტილიდან L წერტილისაკენ. გზის მეორე ნაწილის სიგრძე კი იქნება $OL-AM=\frac{5\sqrt{13}}{3}-5$. მაშასადამე, საძიებელი სიდიდე ტოლია

$$\frac{2\sqrt{13}}{3}+\frac{5\sqrt{13}}{3}-5=\frac{7}{3}\sqrt{13}-5.$$

პასუხი: $\frac{7}{3}\sqrt{13}-5.$

XI-XII.1. ვთქვათ, ფირმამ 2000 ლარითა და 320 შუქდიოდით უნდა დაამზადოს A ტიპის x ცალი სათამაშო, ხოლო B ტიპის კი – y ცალი. მაშინ ამოცანის პირობის თანახმად x და y მიმართ გვექნება უტოლობათა სისტემა



$$\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ 25x+40y\leq 2000 \\ 5x+4y\leq 320 \end{cases}$$

ჩვენი მიზანია ამ უტოლობათა ამონახსნთა სიმრავლეში ვიპოვოთ ისეთი $(x_0;y_0)$ წყვილი (წყვილები),

სადაც $P=6x+10y$ მიიღებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას. სურათზე დაშტრიხულია მოცემულ უტოლობათა სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე. იგი წარმოადგენს ამოზნექილ ოთხკუთხედს წვეროებით $(0;0)$, $(0;50)$, $(48;20)$, $(64;0)$, ამიტომ საკმარისია დავითვალოთ P-ს მნიშვნელობები $(0;50)$, $(48;20)$, $(64;0)$ წერტილებში და შევადაროთ ერთმანეთს. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ P მაქსიმუმს აღწევს $(0;50)$-თვის და უდრის 500.

პასუხი: ფირმამ უნდა დაამზადოს მხოლოდ 50 ცალი B ტიპის სათამაშო და არცერთი A ტიპის სათამაშო.

XI-XII.2. რადგან $a_{k+1}-a_k=k+2$ ამიტომ გვექნება

$$\begin{cases} a_2-a_1=3, \\ a_3-a_2=4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{k+1}-a_k=k+2. \end{cases} \Rightarrow a_{k+1}-3=\frac{k+5}{2}\cdot k \Rightarrow a_k=\frac{1}{2}\left(k^2+3k+2\right)$$ ნებისმიერი ნატურალური k-თვის. მაშინ $\left(1-\frac{1}{a_k}\right)=\left(1-\frac{2}{k^2+3k+2}\right)=\frac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)}.$ ამიტომ

$$\left(1-\frac{1}{a_1}\right)\left(1-\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{a_n}\right)=\frac{1\cdot4}{2\cdot3}\cdot\frac{2\cdot5}{3\cdot4}\cdot\frac{3\cdot6}{4\cdot5}\cdots\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}\cdot\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}=$$

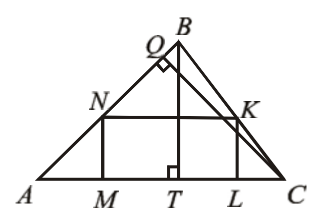
$$=\frac{1\cdot2\cdots n}{2\cdot3\cdots n(n+1)}\cdot\frac{4\cdot5\cdots(n+2)(n+3)}{3\cdot4\cdot5\cdots(n+2)}=\frac{n+3}{3(n+1)}>\frac{1}{3}.$$

XI-XII.3. რადგან გვაინტერესებს დარჩენილი ორი რიცხვის ჯამის 5-ზე გაყოფადობის შეფასება ამიტომ საკმარისია მოცემული რიცხვების მაგივრად განვიხილოთ მათი 5-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთები. მაშინ ნაშთები 1 და 2 გვექნება ოთხ-ოთხი ცალი, ხოლო ნაშთები 3, 4 და 0 კი – სამ-სამი ცალი. პირველი მოთამაშე პირველივე სვლაზე შლის 1-ს (ანუ რომელიმე რიცხვს, რომელიც 5-ზე გაყოფისას ნაშთში გვაძლევს 1-ს). დარჩენილი რიცხვების ჯამი კი 5-ზე გაყოფისას ნაშთში გვაძლევს 2-ს. ამის შემდეგ მეორე მოთამაშის 1, 3 ან 4-ის წაშლის შემთხვევში პირველი მოთამაშე პასუხობს შესაბამისად 4, 2 ან 1-ის წაშლით, რათა დარჩენილი რიცხვების ჯამი 5-ზე გაყოფისას ნაშთში კვლავ გვაძლევდეს 2-ს. ასე გრძელდება მანამ, სანამ მეორე მოთამაშე არ წაშლის 0-ს ან 2-ს. ამის საპასუხოდ პირველი მოთამაშე შლის შესაბამისად 2-ს ან 0-ს. ამ სვლის შემდეგ დარჩენილი რიცხვების ჯამი 5-ზე უკვე უნაშთოდ იყოფა და თამაშის ბოლომდე მეორე მოთამაშის სვლებს 0, 1, 2, 3 ან 4, პირველი მოთამაშე პასუხობს შესაბამისად სვლებით 0, 4, 3, 2 ან 1. ამასთან ყველა ეს სვლა შესაძლებელია, რადგან 0 ორი ცალია დარჩენილი, ხოლო წყვილები 1, 4 და 2, 3 თანაბრად არიან და ასევე ერთდროულად ქრებიან.

XI-XII.4. დაუშვათ, ასეთი M სიმრავლე არსებობს. მაშინ M შეიცავს ერთ მაინც დადებით რიცხვს. მართლაც თუ $x\in M$ და $x<0$ მაშინ $x^2-9x+25\in M$ და ამავე დროს $x^2-9x+25>0$. ვინაიდან $f(5)=5$, ამიტომ შესაძლოა $5\in M$. ამავე დროს $f(x)=5\Leftrightarrow x\in\{4;\,5\}$. ვაჩვენოთ, რომ M სიმრავლეში შეიძლება იყოს მხოლოდ 4 და 5. მართლაც თუ დაუშვებთ, რომ $x\in M$ და $x\notin\{4;\,5\}$, მაშინ $f(x)>x$ (ვინაიდან $x\neq5$) და M სიმრავლეში აღმოჩნდება რიცხვთა ზრდადი მიმდევრობა $x,\, f(x),\, f(f(x)),\ldots$. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ ყოველი x რიცხვისათვის $f(x)\neq4$. მაშასადამე M სიმრავლე არ არსებობს.

პასუხი: M სიმრავლე არ არსებობს.

XI-XII.5. განვიხილოთ ABC სამკუთხედში ჩახაზული $MNKL$ მართკუთხედი. შემოვიტანოთ აღნიშვნები:



$AC=b,\ AB=c,\ CQ=l,\ BT=h,\quad MN=x,\ ML=y.\ NBK$ და ABC სამკუთხედების მსგავსებიდან ვღებულობთ ტოლობას $\dfrac{b}{h}=\dfrac{y}{h-x}$,

საიდანაც $y=\frac{(h-x)b}{h}$. $NL^2=x^2+y^2=x^2+b^2\left(1-\frac{x}{h}\right)^2=\left(1+\frac{b^2}{h^2}\right)x^2-\frac{2b^2}{h}x+b^2$. ცხადია, NL ღებულობს უმცირეს მნიშვნელობას, როდესაც $x=\frac{b^2h}{h^2+b^2}$, ამ დროს $NL^2=\frac{b^2h^2}{b^2+h^2}$.

ლემა 1. სამკუთხედში ჩახაზული უმცირესი დიაგონალის მქონე მართკუთხედი ეყრდნობა სამკუთხედის უდიდეს გვერდს (ანუ, მისი ორი წვერო მდებარეობს უდიდეს გვერდზე).

დამტკიცება. დავუშვათ AC არის სამკუთხედის უდიდესი გვერდი, მაშინ $AB\le AC$. AB გვერდზე დაყრდნობილ მართკუთხედების დიაგონალების კვადრატებს შორის უმცირესი ტოლია $\frac{c^2l^2}{c^2+l^2}$. $2S_{ABC}=bh=cl$. გვაქვს

$$\frac{\frac{b^2h^2}{b^2+h^2}}{\frac{c^2l^2}{c^2+l^2}}=\frac{c^2+l^2}{b^2+h^2}=\frac{c^2+\frac{4S_\Delta}{c^2}}{b^2+\frac{4S_\Delta}{b^2}}\le 1.$$ მართლაც, $$c^2+\frac{4S_\Delta}{c^2}-b^2-\frac{4S_\Delta}{b^2}=c^2-b^2-4S_\Delta\frac{c^2-b^2}{c^2b^2}=$$

$=\left(c^2-b^2\right)\left(1-\frac{4S_\Delta}{c^2b^2}\right)\le 0$, რადგან $1-\frac{4S_\Delta}{c^2b^2}>0$. ($S_\Delta=\frac{1}{2}bc\sin\angle A<\frac{1}{2}bc$).

ლემა დამტკიცებულია.

მაშასადამე, $f(\Delta)=\frac{b^2+h^2}{2bh}$, სადაც b არის Δ სამკუთხედის უდიდესი გვერდი, ხოლო h მასზე დაშვებული სიმაღლე.

ლემა 2. ნებისმიერი ფიქსირებული $k>0$-თვის, $\{f(\Delta)\colon \Delta \text{ ნებისმიერი სამკუთხედია}\}$და $\{f(\Delta)\colon \Delta \text{ ნებისმიერი სამკუთხედია, რომლის ფართობია } k\}$ რიცხვითი სიმრავლეების უმცირესი ელემენტები ტოლია.

დამტკიცება. თუ $\Delta_1\sim\Delta_2$, მაშინ $f(\Delta_1)=f(\Delta_2)$. ეს გამომდინარეობს $f(\Delta)=\frac{b^2+h^2}{2bh}$ ფორმულიდან (მისი ერთგვაროვნებიდან). რადგან ნებისმიერი სამკუთხედისათვის არსებობს მისი მსგავსი სამკუთხედი, რომლის ფართობია k, ლემა დამტკიცებულია.

განვიხილოთ $k=\frac{1}{2}$, ლემა 2-ის თანახმად, საჭიროა ვიპოვოთ $f(\Delta)=\frac{b^2+\frac{1}{b^2}}{2}$ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა, სადაც b წარმოადგენს $\frac{1}{2}$-ის ტოლი ფართობის მქონე სამკუთხედის უდიდეს გვერდს. ასეთი სამკუთხედების უდიდესი გვერდი მეტია 1-ზე (რადგან მათ შორის უმცირესია ტოლგვერდა სამკუთხედის გვერდი, რომელიც ტოლია $\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}>1$). ადვილი შესამჩნევია, რომ $b^2+\frac{1}{b^2}$ ფუნქცია ზრდადია, $(1;\infty)$ ინტერვალში,

ამიტომ ის მიაღწევს უმცირეს მნიშვნელობას ტოლგვერდა სამკუთხედის გვერდისათვის $b=\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$. აღნიშნული სამკუთხედისათვის $f(\Delta)=\frac{b^2+\frac{1}{b^2}}{2}=\frac{7}{4\sqrt{3}}$.

პასუხი: $\frac{7}{4\sqrt{3}}$.

დანართი 1.

51-ე საერთაშორისო ოლიმპიადა მათემატიკაში

პირველი დღე

ამოცანა 1.

იპოვეთ ყველა ისეთი $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ფუნქცია, რომლისთვისაც $f\left([x]y\right)=f(x)\left[f(y)\right]$ ტოლობა სრულდება ყოველი $x,y\in\mathbb{R}$ რიცხვებისათვის. (აქ $[z]$ აღნიშნავს უდიდეს მთელ რიცხვს, რომელიც ნაკლებია ან ტოლი z-ის.)

ამოცანა 2.

ვთქვათ, I არის ABC სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრი, ხოლო Γ კი ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი. ვთქვათ, AI წრფე კიდევ ერთხელ კვეთს Γ წრეწირს D წერტილში. ვთქვათ, E წერტილი აღებულია BDC რკალზე, ხოლო F წერტილი BC გვერდზე ისე, რომ $\angle BAF=\angle CAE<\frac{1}{2}\angle BAC$ და ვთქვათ, G არის IF მონაკვეთის შუაწერტილი. დაამტკიცეთ, რომ DG და EI წრფეების გადაკვეთის წერტილი მდებარეობს Γ წრეწირზე.

ამოცანა 3.

ვთქვათ, $\mathbb{N}$ არის ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე. იპოვეთ ყველა ისეთი $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ფუნქცია, რომ $\left(g(m)+n\right)\left(m+g(n)\right)$ იყოს სრული კვადრატი ყოველი $m,n\in\mathbb{N}$ რიცხვებისათვის.

მეორე დღე

ამოცანა 4.

ვთქვათ, P წერტილი მდებარეობს ABC სამკუთხედის შიგნით და AP, BP და CP წრფეები ABC სამკუთხედზე შემოხაზულ Γ წრეწირს კიდევ ერთხელ კვეთენ, შესაბამისად, K, L და M წერტილებში. Γ წრეწირისადმი C წერტილში გავლებული მხები AB კვეთს S წერტილში. ვთქვათ, $SC = SP$. დაამტკიცეთ, რომ $MK = ML$.

ამოცანა 5.

მოცემულია ექვსი ყუთი B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6. თითოეულ მათგანში თავდაპირველად არის თითო მონეტა. ნებადართულია შემდეგი ორი ტიპის ოპერაცია:

ტიპი 1: ვირჩევთ ნებისმიერ არაცარიელ B_j ყუთს, სადაც $1 \le j \le 5$, საიდანაც ვიღებთ ერთ მონეტას, ხოლო B_{j+1} ყუთში ვამატებთ ორ მონეტას.

ტიპი 2: ვირჩევთ ნებისმიერ არაცარიელ B_k ყუთს, სადაც $1 \le k \le 4$, საიდანაც ვიღებთ ერთ მონეტას, ხოლო B_{k+1} და B_{k+2} ყუთების (შესაძლოა ცარიელის) შიგთავსებს ადგილებს ვუცვლით.

დაადგინეთ, არსებობს თუ არა ოპერაციათა ისეთი სასრული მიმდევრობა, რომლის შედეგად B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 ყუთები აღმოჩნდება ცარიელი, ხოლო B_6 ყუთში იქნება ზუსტად $2010^{2010^{2010}}$ მონეტა. (შევნიშნოთ, რომ $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

ამოცანა 6.

ვთქვათ, $a_1, a_2, a_2, \ldots$ არის დადებითი ნამდვილი რიცხვების მიმდევრობა. ვთქვათ, არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი s, რომ

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \le k \le n-1\}$$

ტოლობა სრულდება ყოველი $n > s$ ნატურალური რიცხვისთვის.

დაამტკიცეთ, რომ იარსებებს ისეთი ნატურალური რიცხვები l და N, სადაც $l \le s$, რომ $a_n = a_l + a_{n-l}$ ტოლობა შესრულდება ყოველი $n \ge N$ ნატურალური რიცხვებისათვის.

51-ე საერთაშორისო ოლიმპიადის ამოცანების ამოხსნები

ამოცანა 1.

ჯერ შევნიშნოთ, რომ $x=0$-თვის

$$f\left([x]y\right)=f(x)\left[f(y)\right] \qquad (1)$$

ტოლობიდან მივიღებთ, $f\left(0\right)=f(0)\left[f(y)\right]$ ნებისმიერი $y\in\mathbb{R}$. განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

I. ვთქვათ, $f(0)\neq 0$. მაშინ მივიღებთ, რომ $\left[f(y)\right]=1$ ნებისმიერი $y\in\mathbb{R}$, ხოლო (1) ტოლობა კი მიიღებს სახეს $f\left([x]y\right)=f(x)$, საიდანაც $y=0$-თვის გვექნება $f(x)=f(0)=C\neq 0$. მაშასადამე $\left[f(y)\right]=1=\left[C\right]$ საიდანაც მივიღებთ $1\leq C<2$.

II. ვთქვათ, $f(0)=0$. განვიხილოთ ორი ქვეშემთხვევა:
   II.ა. დავუშვათ, არსებობს ისეთი $0<\alpha<1$, რომ $f(\alpha)\neq 0$. მაშინ $x=\alpha$-თვის (1) ტოლობიდან მივიღებთ, რომ $0=f(0)=f(\alpha)\left[f(y)\right]$ ნებისმიერი $y\in\mathbb{R}$, საიდანაც გვექნება, $\left[f(y)\right]=0$ ნებისმიერი $y\in\mathbb{R}$. მაშინ (1) ტოლობა $x=1$-თვის მოგვცემს $f(y)=0$ ნებისმიერი $y\in\mathbb{R}$-თვის, რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას $f(\alpha)\neq 0$.
   II.ბ. დავუშვათ, $f(\alpha)=0$ ყოველი $0\leq\alpha<1$. მაშინ ნებისმიერი $z\in\mathbb{R}$-თვის (1) ტოლობიდან მივიღებთ $f(z)=f\left([N]\alpha\right)=f(N)\left[f(\alpha)\right]=0$, სადაც $N=[z]+1$, თუ $z\geq 0$ და $N=[z]-1$, თუ $z<0$, ხოლო $\alpha:=\dfrac{z}{N}\in\left[0;\,1\right)$.

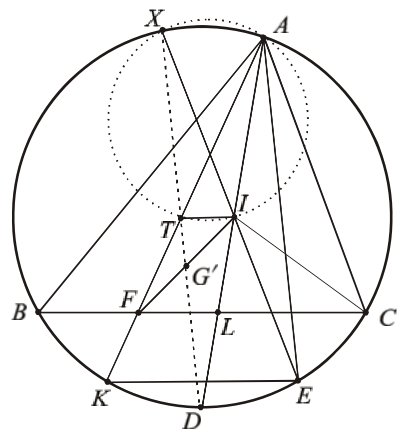
ბოლოს შევნიშნოთ, რომ მიღებული ფუნქციები აკმაყოფილებენ (1)-ს, რაშიც ადვილად დავრწმუნდებით უშუალო შემოწმებით.

ამოცანა 2.

აღვნიშნოთ X-ით EI წრფის Γ წრეწირთან მეორე გადაკვეთის წერტილი, ხოლო L-ით კი $\angle BAC$ კუთხის ბისექტრისის ფუძე. G' და T -თი აღვნიშნოთ შესაბამისად DX მონაკვეთის IF და AF წრფეებთან გადაკვეთის წერტილები. ჩვენი მიზანია ვაჩვენოთ, რომ $G=G'$ ან $IG'=G'F$. ამიტომ, AIF სამკუთხედისა და DX წრფისთვის მენელაის თეორემის (Menelaus theorem) თანახმად, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$1=\frac{G'F}{IG'}=\frac{TF}{AT}\cdot\frac{AD}{ID}, \quad \text{ანუ} \quad \frac{TF}{AT}=\frac{ID}{AD}.$$

ვთქვათ, AF წრფე გადაკვეთს Γ წრეწირს $K\neq A$ წერტილში, იხ. სურათი.



რადგან $\angle BAK = \angle CAE$, ამიტომ $\widehat{BK} = \widehat{CE}$ და მაშასადამე $KE \parallel BC$. შევნიშნოთ, რომ წერტილები I, A, X, T რაღაც წრეწირზე მდებარეობენ, რადგან ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს $\angle IAT = \angle DAK = \angle EAD = \angle EXD = \angle IXT$. ამიტომ სამართლიანია შემდეგი $\angle ITA = \angle IXA = \angle EXA = \angle EKA$, მაშასადამე $IT \parallel KE \parallel BC$, საიდანაც მივიღებთ

$\frac{TF}{AT} = \frac{IL}{AI}$. რადგან CI წარმოადგენს $\angle ACL$-ის ბისექტრისას, ამიტომ $\frac{IL}{AI} = \frac{CL}{AC}$. შევნიშნოთ, რომ $\angle DCL = \angle DCB = \angle DAB = \angle CAD = \frac{1}{2}\angle BAC$, ამიტომ საკუთხედები DCL და DAC მსგავსია და სამართლიანია ტოლობა $\frac{CL}{AC} = \frac{DC}{AD}$. შევნიშნოთ ასევე რომ, რადგან D წარმოადგენს BC რკალის შუაწერტილს, ის თანაბრადაა დაშორებული I, B, C წერტილებიდან და მაშასადამე $\frac{DC}{AD} = \frac{ID}{AD}$. მიღებული ტოლობების გაერთიანება საბოლოოდ მოგვცემს $\frac{TF}{AT} = \frac{IL}{AI} = \frac{CL}{AC} = \frac{DC}{AD} = \frac{ID}{AD}$.

ამოცანა 3.

შევნიშნოთ, რომ $g(n) = n + c$ სახის ყველა ფუნქცია არაუარყოფითი მთელი c მუდმივებისთვის აკმაყოფილებს მოცემულ პირობას. მართლაც

$$\big(g(m)+n\big)\big(m+g(n)\big) = \big(n+m+c\big)^2 .$$

ამიტომ საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ არ არსებობს სხვა სახის ფუნქცია, რომელიც მოცემულ პირაბას დააკმაყოფილებს. ჯერ დავამტკიცოთ შემდეგი ლემა.

ლემა. ვთქვათ $p\,|\,g(k)-g(l)$ (ანუ, p იყოფა $g(k)-g(l)$) რომელიღაც p მარტივი და k, l ნატურალური რიცხვებისათვის, მაშინ $p\,|\,k-l$.

დამტკიცება. ვთქვათ $p^2\,|\,g(k)-g(l)$, მაშინ არსებობს $a\in\mathbb{Z}$, რომ $g(l)=g(k)+p^2a$. ავიღოთ p-ს არაჯერადი ნატურალური რიცხვი D ისე, რომ $D>\max\{g(k),g(l)\}$. შემოვიტანოთ აღნიშვნა $n:=pD-g(k)$. მაშინ $n+g(k)=pD$ და $n+g(l)=pD+\left(g(l)-g(k)\right)=p\left(D+pa\right)$ ნატურალური რიცხვებიდან ორივე იყოფა p-ზე, მაგრამ არ იყოფა p^2-ზე. თუ დავუშვებთ, რომ სრულდება ამოცანის პირობა, გვექნება, რომ რიცხვები $\left(g(k)+n\right)\left(g(n)+k\right)$ და $\left(g(l)+n\right)\left(g(n)+l\right)$ სრული კვადრატებია, იყოფიან p-ზე (ამიტომ p^2-ზეც), ეს კი ნიშნავს, რომ თანამამრავლები $g(n)+k$ და $g(n)+l$ ასევე იყოფიან p-ზე, ამიტომ $p\,|\,(g(n)+k)-(g(n)+l)=k-l$.

მეორეს მხრივ, თუ $g(k)-g(l)$ იყოფა p-ზე და არა p^2-ზე, მაშინ D რიცხვს ავიღებთ იგივეს, ხოლო $n:=p^3D-g(k)$. ამ შემთხვევაში მივიღებთ, რომ ნატურალური რიცხვები $g(k)+n=p^3D$ და $g(l)+n=p^3D+\left(g(l)-g(k)\right)$ შესაბამისად იყოფიან p^3-სა და p-ზე, და არა p^4-სა და p^2-ზე. შემდეგ კი, ისევე როგორც ზევით, მივიღებთ რომ რიცხვები $g(n)+k$ და $g(n)+l$ იყოფიან p-ზე და ამიტომ $p\,|\,(g(n)+k)-(g(n)+l)=k-l$. ლემა დამტკიცებულია.

დავუბრუნდეთ ამოცანას და ჯერ დავუშვათ, რომ $g(k)=g(l)$ რომელიღაც $k,l\in\mathbb{N}$. მაშინ ლემის ძალით $k-l$ ნებისმიერ მარტივ რიცხვზე იყოფა და ამიტომ $k-l=0$, ანუ $k=l$. მაშასადამე, g ფუნქცია ინექციაა.

განვიხილოთ რიცხვები $g(k)$ და $g(k+1)$. რადგან $(k+1)-k=1$ თვის მარტივი რიცხვი არ წარმოადგენს გამყოფს, ამიტომ ლემის ძალით იგივე სამართლიანია $g(k+1)-g(k)$-თვის, ამგვარად $|\,g(k+1)-g(k)\,|=1$.

ახლა, ვთქვათ $g(2)-g(1)=q,\ |q|=1$. მაშინ ინდუქციის ძალით $g(n)=g(1)+q(n-1)$. მართლაც, $n=1,2$-თვის სამართლიანია q განსაზღვრების თანახმად, ხოლო $n>2$ თვის გვექნება $g(n+1)=g(n)\pm q=q(1)+q(n-1)\pm q$. რადგან $g(n)\neq g(n-2)=g(1)+q(n-2)$, საბოლოოდ მივიღებთ $g(n+1)=g(1)+qn$.

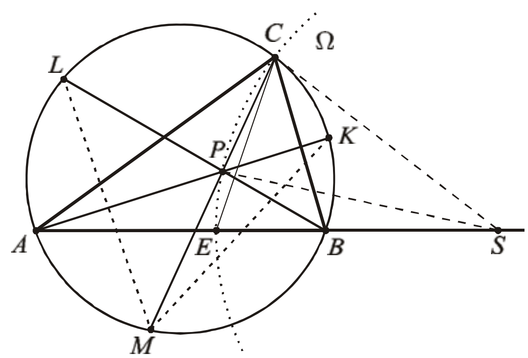
მაშასადამე, $g(n)=g(1)+q(n-1)$. მაგრამ q არ შეიძლება -1-ის ტოლი იყოს, რადგან ამ შემთხვევაში მივიღებთ, რომ $n\geq g(1)+1$-თვის $g(n)\leq 0$ რაც შეუძლებელია. ამგვარად, $q=1$ და $g(n)=\left(g(1)-1\right)+n$ ყოველი $n\in\mathbb{N}$-თვის და $g(1)-1\geq 0$.

ამოცანა **4.**

დავუშვათ $CA > CB$, მაშინ S წერტილი AB სხივზე მდებარეობს. რადგან $\triangle PKM \sim \triangle PCA$ და $\triangle PLM \sim \triangle PCB$ ამიტომ $\dfrac{PM}{KM} = \dfrac{PA}{CA}$ და $\dfrac{LM}{PM} = \dfrac{CB}{PB}$. ამ ორი ტოლობის გადამრავლებით კი მივიღებთ

$$\frac{LM}{KM} = \frac{CB}{CA} \cdot \frac{PA}{PB}.$$

ამგვრად, $MK = ML$ ტოლობა ექვივალენტურია ტოლობის $\dfrac{CB}{CA} = \dfrac{PB}{PA}$. E წერტილით აღვნიშნოთ ABC სამკუთხედში B წვეროდან გავლებული ბისექტრისის ფუძე. შევნიშნოთ, რომ იმ X წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომელთათვისაც $\dfrac{XA}{XB} = \dfrac{CA}{CB}$ წარმოადგენს აპოლონიუსის წრეწირს (Apollonius circle) Ω-ს, რომელიც გადის C და E წერტილებზე, ხოლო მისი ცენტრი Q კი AB წრფეზე მდებარეობს. მაშასადამე, $MK = ML$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ P წერტილი Ω წრეწირზე ძევს, ანუ $QP = QC$.



მაშასადამე, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $S = Q$. მართლაც, რადგან

$$\angle CES = \angle CAE + \angle ACE = \angle BCS + \angle ECB = \angle ECS$$

ამიტომ $SC = SE$ და რადგან S წერტილი AB სხივზე მდებარეობს ამიტომ $S = Q$.

ამოცანა 5.

დავამტკიცოთ, რომ ოპერაციათა ასეთი მიმდევრობა არსებობს.

აღვნიშნოთ $(a_1,a_2,...,a_n)\to(a_1',a_2',...,a_n')$ გამოსახულებით შემდეგი: თუ ერთმანეთის მომდევნო ყუთებში $a_1,a_2,...,a_n$ რაოდენობის მონეტაა, მაშინ რამდენიმე ნებადართული მოქმედების (ოპერაციის) შემდეგ ყუთებში შესაძლებელია მივიღოთ შესაბამისად $a_1',a_2',...,a_n'$ რაოდენობის მონეტა, ისე რომ დანარჩენ ყუთებში მონეტების რაოდენობა არ შეიცვალოს.

ვთქვათ $A=2010^{2010^{2010}}$. ჩვენი მიზანია ვაჩვენოთ $(1,1,1,1,1,1)\to(0,0,0,0,0,A)$. ჯერ დავამტკიცოთ ორი ლემა.

ლემა 1. $(a,0,0)\to(0,2^a,0)$ ნებისმიერი $a\ge 1$.

დამტკიცება. ინდუქციით დავამტკიცოთ, რომ $(a,0,0)\to(a-k,2^k,0)$ ნებისმიერი $1\le k\le a$. $k=1$-თვის გამოვიყენოთ პირველი ტიპის ოპერაცია პირველი ყუთისთვის:

$$(a,0,0)\to(a-1,2,0)=(a-1,2^1,0).$$

ახლა ვთქვათ წინადადება სამართლიანია $k<a$-თვის. მაშინ $(a-k,2^k,0)$-თვის გამოვიყენოთ პირველი ტიპის მოქმედება შუა ყუთისთვის 2^k-ჯერ, სანამ არ დაცარიელდება. შემდეგ კი გამოვიყენოთ მეორე ტიპის ოპერაცია პირველი ყუთისთვის: $(a-k,2^k,0)\to(a-k,2^k-1,2)\to...\to(a-k,0,2^{k+1})\to(a-k-1,0,2^{k+1})$.

მივიღეთ, რომ წინადადება სამართლიანია $k+1$-თვის. ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2. ვთქვათ $P_n=\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}_{n}$ ნებისმიერი $n\in\mathbb{N}$ (მაგ.$P_3=2^{2^2}=16$). მაშინ $(a,0,0,0)\to(0,P_a,0,0)$ ნებისმერი $a\ge 1$.

დამტკიცება. ისევე როგორც ზევით, დებულებას $(a,0,0,0)\to(a-k,P_k,0,0)$, ნებისმიერი $1\le k\le a$, დავამტკიცებთ ინდუქციით. $k=1$-თვის გამოვიყენოთ პირველი ტიპის ოპერაცია პირველი ყუთისთვის: $(a,0,0,0)\to(a-1,2,0,0)=(a-1,P_1,0,0)$.

ახლა ვთქვათ წინადადება სამართლიანია $k<a$-თვის. მაშინ $(a-k,P_k,0,0)$-თვის ჯერ გამოვიყენოთ ლემა 1, ხოლო შემდეგ კი - მეორე ტიპის ოპერაცია პირველი ყუთისთვის: $(a-k,P_k,0,0)\to(a-k,0,2^{P_k},0,0)=(a-k,0,P_{k+1},0)\to(a-k-1,P_{k+1},0,0)$.

მივიღეთ, რომ წინადადება სამართლიანია $k+1$-თვის. ლემა დამტკიცებულია.

დავუბრუნდეთ ამოცანას. გამოვიყენოთ პირველი ტიპის ოპერაცია მეხუთე ყუთისთვის, შემდეგ მეორე ტიპის ოპერაცია რიგრიგობით $B_4,\ B_3,\ B_2$ და B_1 ყუთებისათვის მოცემული თანმიმდევრობით. შემდეგ კი ლემა 2 ორჯერ:

$$\begin{aligned}&(1,1,1,1,1,1)\to(1,1,1,1,0,3)\to(1,1,1,0,3,0)\to\\&(1,1,0,3,0,0)\to(1,0,3,0,0,0)\to(0,3,0,0,0,0)\to\\&(0,0,P_3,0,0,0)=(0,0,16,0,0,0)\to(0,0,0,P_{16},0,0).\end{aligned}$$

შევნიშნოთ, რომ B_4-ში მონეტების რაოდენობა A-ზე მეტია. მართლაც,

$$A\le 2010^{2010^{2010}}<\left(2^{11}\right)^{2010^{2010}}=2^{11\cdot 2010^{2010}}<2^{2010^{2011}}<2^{\left(2^{11}\right)^{2011}}=2^{2^{11\cdot 2011}}<2^{2^{2^{15}}}<P_{16}.$$

B_4 ყუთში მონეტების რაოდენობის შესამცირებლად გამოვიყენოთ მეორე ტიპის მოქმედება მანამ, სანამ მათი რაოდენობა არ გაუტოლდება $A/4$.

$$(0,0,0,P_{16},0,0)\to(0,0,0,P_{16}-1,0,0)\to(0,0,0,P_{16}-2,0,0)\to\dots\to(0,0,0,A/4,0,0).$$

საბოლოოდ, გამოვიყენოთ პირველი ტიპის მოქმედებები B_4 და B_5 ყუთების დაცლამდე: $(0,0,0,A/4,0,0)\to\dots\to(0,0,0,0,A/2,0)\to\dots\to(0,0,0,0,0,A)$.

ამოცანა 6.

პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ ამოცანის პირობის თანახმად

$$a_n=\max\left\{a_k+a_{n-k}\mid 1\le k\le n-1\right\} \tag{2}$$

და გვაქვს, რომ ყოველი a_n, $n>s$ შეიძლება გამოისახოს როგორც $a_n=a_{j_1}+a_{j_2}$, სადაც $j_1,\ j_2<n,\ \ j_1+j_2=n$. თუ, ვთქვათ, $j_1>s$ მაშინ შეგვიძლია a_{j_1} -თვის გამოვიყენოთ ამოცანის პირობა და ასე გავაგძელოთ. საბოლოოდ მივიღებთ, რომ a_n შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$a_n=a_{i_1}+\dots+a_{i_k}\,, \tag{3}$$

$$1\le i_j\le s,\quad i_1+\dots+i_k=n\,. \tag{4}$$

ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ a_{i_1} და a_{i_2} არის (3) გამოსახულებაში ბოლო საფეხურზე მიღებული რიცხვები, ამიტომ $i_1+i_2>s$. მაშინ (4) გამოსახულება შეგვიძლია შემდეგნაირად დავაზუსტოთ

$$1\le i_j\le s,\quad i_1+\ldots+i_k=n,\;\; i_1+i_2>s\,. \tag{5}$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა $s_j=i_1+\ldots+i_j$, მაშინ (2)-ის თანახმად მივიღებთ

$$a_n=a_{s_k}\ge a_{s_{k-1}}+a_{i_k}\ge a_{s_{k-2}}+a_{i_{k-1}}+a_{i_k}\ge\ldots\ge a_{i_1}+\ldots+a_{i_k}\,.$$

თუ შევაჯამებთ ზემოთ მოყვანილ ფაქტებს მივიღებთ, რომ სამართლიანია შემდეგი **დებულება**: ყოველი $n>s$-თვის $a_n=\max\left\{a_{i_1}+\ldots+a_{i_k}:\left(i_1,\ldots,i_k\right)\text{ აკმაყოფილებს }(9)-\text{ს}\right\}$.

შემოვიტანოთ აღნიშვნა $m:=\max\limits_{1\le i\le s}\dfrac{a_i}{i}$ და დავაფიქსიროთ ინდექსი $l\le s$ ისე, რომ $m=\dfrac{a_l}{l}$.

განვიხილოთ $n\ge s^2l+2s$ და ავიღოთ a_n-ის გამოსახულება (3), (5) ფორმით. მაშინ გვექნება $n=i_1+\ldots+i_k\le sk$, ამგვარად $k\ge n/s\ge sl+2$. დავუშვათ, $i_3,\ldots,i_k$ რიცხვებიდან არცერთი არ უდრის l-ს. მაშინ დირიხლეს პრინციპის თანახმად არსებობს ინდექსი $1\le j\le s$, რომელიც $i_3,\ldots,i_k$ რიცხვებში l-ჯერ მაინც გვხდება და $j\ne l$. ამოვშალოთ $\left(i_1,\ldots,i_k\right)$-დან l ცალი j ინდექსი და დავამატოთ j ცალი l ინდექსი. მივიღებთ მიმდევრობას $\left(i_1,i_2,i'_3,\ldots,i'_{k'}\right)$ რომელიც ასევე აკმაყოფილებს (5)-ს. დებულების თანახმად გვაქვს $a_{i_1}+\ldots+a_{i_k}=a_n\ge a_{i_1}+a_{i_2}+a_{i'_3}+\ldots+a_{i'_{k'}}$, ხოლო თუ ამოვაგდებთ ერთნაირ წევრებს მივიღებთ, $la_j\ge ja_l$, ანუ $\dfrac{a_l}{l}\le\dfrac{a_j}{j}$. l-ის განსაზღვრების თანახმად ეს კი ნიშნავს, რომ $la_j=ja_l$ და ამიტომ $a_n=a_{i_1}+a_{i_2}+a_{i'_3}+\ldots+a_{i'_{k'}}$.ამგვარად, ყოველი $n\ge s^2l+2s$ მივიღეთ (3), (5) წარმოდგენა რომ $i_j=l$ რომელიღაც $j\ge3$. გადაჯგუფების შემდეგ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $i_k=l$.

ბოლოს შევნიშნოთ, რომ ამ წარმოდგენაში ინდექსები $\left(i_1,\ldots,i_k\right)$ აკმაყოფილებენ (5) პირობას თუ n-ს შევცვლით $n-l$-ით. მაშინ დებულების ძალით მივიღებთ

$$a_{n-l}+a_l\ge\left(a_{i_1}+\ldots+a_{i_{k-1}}\right)+a_l=a_n\,,$$

საიდანაც (2)-ის თანახმად გვექნება $a_n=a_{n-l}+a_l$, ყოველი $n\ge s^2l+2s$-თვის.

დანართი 2.

მათემატიკის ეროვნული სასწავლო ოლიმპიადის

გამარჯვებული მოსწავლეები

VII კლასი

გვარი, სახელი	სკოლა	დიპლომის ხარისხი
ჯოხაძე დავითი	199-ე სკოლა (პანსიონი „კომაროვი“)	I
ხოსროშვილი გიორგი	199-ე სკოლა (პანსიონი „კომაროვი“)	II
ხადური ნინო	199-ე სკოლა (პანსიონი „კომაროვი“)	II
მეშველიანი ზაური	199-ე სკოლა (პანსიონი „კომაროვი“)	III
გვიმრაძე ანდრო	42 -ე საჯარო სკოლა	სიგელი
სოხაშვილი მიხეილი	199-ე სკოლა (პანსიონი „კომაროვი“)	სიგელი
გირკელიძე გიორგი	189 -ე საჯარო სკოლა	სიგელი
კობეშავიძე ოთარი	199-ე სკოლა (პანსიონი „კომაროვი“)	სიგელი
კუტალია კონსტანტინე	42 -ე საჯარო სკოლა	სიგელი
დარსაძე ბაქარი	ანდრია რაზმაძის სახელობის 41-ე საჯარო სკოლა	სიგელი

VIII კლასი

გვარი, სახელი	სკოლა	დიპლომის ხარისხი
ნიშნიანიძე გიორგი	ქ. ქუთაისის 41 -ე საჯარო სკოლა	I
გონაშვილი გიორგი	199-ე სკოლა (პანსიონი „კომაროვი“)	II
მარგველაშვილი ირაკლი	ანდრია რაზმაძის სახელობის 41-ე საჯარო სკოლა	II
მელია ამირანი	199-ე სკოლა (პანსიონი „კომაროვი“)	III
ხადური ირაკლი	199-ე სკოლა (პანსიონი „კომაროვი“)	სიგელი
სვანიძე გიორგი	დემირელის სახ.კერძო კოლეჯი	სიგელი
ჯაში თორნიკე	საქ. საპატრიარქოს წმ. ილია მართლის სახ. თბილისის სკოლა	სიგელი
ჯანიძე ბათია	ი. ოცხელის სახ. 2 საჯარო სკოლა	სიგელი
ჯოლბორდი თორნიკე	199-ე სკოლა (პანსიონი „კომაროვი“)	სიგელი
დონაძე ნიკოლოზი	199-ე სკოლა (პანსიონი „კომაროვი“)	სიგელი
სილაგაძე შოთა	ანდრია რაზმაძის სახელობის 41-ე საჯარო სკოლა	სიგელი

IX კლასი

გვარი, სახელი	სკოლა	დიპლომის ხარისხი
მანძულაშვილი თორნიკე	42 -ე საჯარო სკოლა	I
მარგველაშვილი აკაკი	ანდრია რაზმაძის სახელობის 41-ე საჯარო სკოლა	II
ბეჟაშვილი მარიამი	199-ე სკოლა (პანსიონი „კომაროვი“)	III
მალუძე სანდრო	199-ე სკოლა (პანსიონი „კომაროვი“)	სიგელი
მარგველაშვილი ანი	ანდრია რაზმაძის სახელობის 41-ე საჯარო სკოლა	სიგელი
სხირტლაძე ჯიმშერი	199-ე სკოლა (პანსიონი „კომაროვი“)	სიგელი
ზაბახიძე როსტომი	199-ე სკოლა (პანსიონი „კომაროვი“)	სიგელი

X კლასი

გვარი, სახელი	სკოლა	დიპლომის ხარისხი
აბულაძე თორნიკ	ანდრია რაზმაძის სახელობის 41-ე საჯარო სკოლა	სიგელი
მაღრიანი მიხეილი	ანდრია რაზმაძის სახელობის 41-ე საჯარო სკოლა	სიგელი
საღარაძე თორნიკე	133-ე საჯარო სკოლა	სიგელი
სახელაშვილი მამუკა	ანდრია რაზმაძის სახელობის 41-ე საჯარო სკოლა	სიგელი

XI-XII კლასები

გვარი, სახელი	სკოლა	დიპლომის ხარისხი
ტაბიძე ცოტნე	ანდრია რაზმაძის სახელობის 41-ე საჯარო სკოლა	I
ფერაძე ლაშა	199-ე სკოლა (პანსიონი „კომაროვი“)	II
გიგლემიანი გიორგი	42 -ე საჯარო სკოლა	III
ლაკირბაია ლაშა	199-ე სკოლა (პანსიონი „კომაროვი“)	სიგელი
ქართველიშვილი გიორგი	199-ე სკოლა (პანსიონი „კომაროვი“)	სიგელი
კაკაურიძე ედუარდი	42 -ე საჯარო სკოლა	სიგელი
ამბროლაძე ნოდარი	ანდრია რაზმაძის სახელობის 41-ე საჯარო სკოლა	სიგელი
ბოჭოშვილი შოთა	24 -ე საჯარო სკოლა	სიგელი
ვაშაყმაძე დაჩი	ი. ოცხელის სახ. 2 საჯარო სკოლა	სიგელი
პატარაია გიორგი	42 -ე საჯარო სკოლა	სიგელი
გუდავაძე ირაკლი	42 -ე საჯარო სკოლა	სიგელი
გუმბერიძე გიგა	199-ე სკოლა (პანსიონი „კომაროვი“)	სიგელი